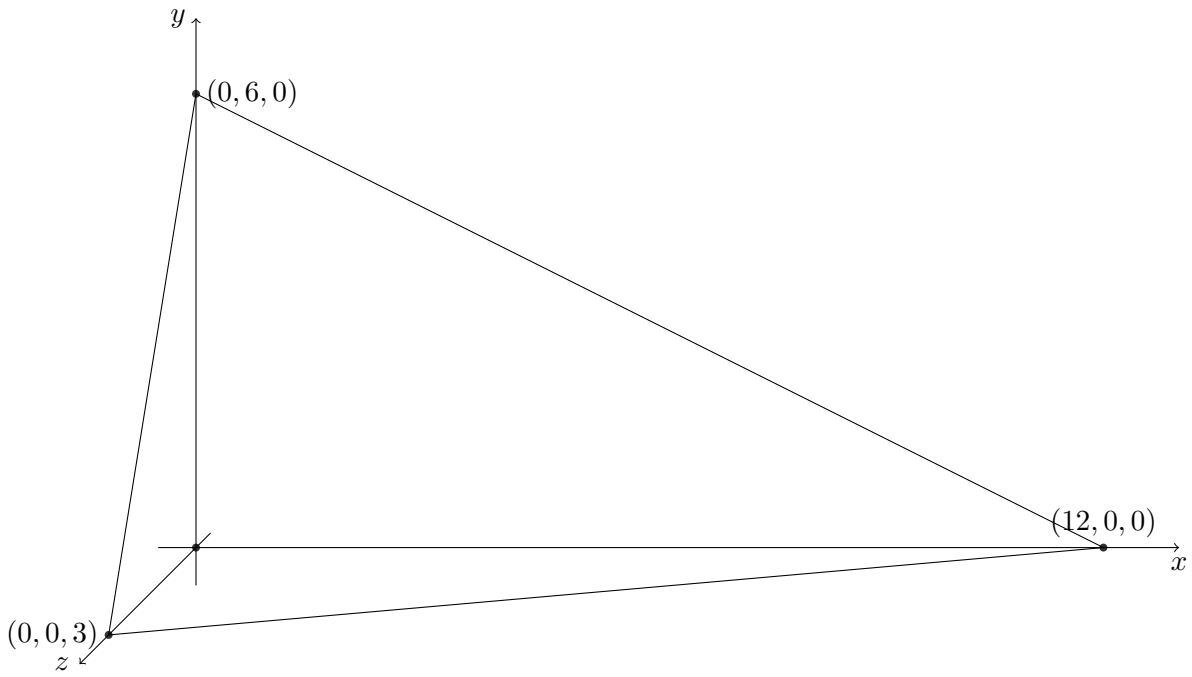
1. **Gruppe A**

   Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

   $$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0, x + 2y + 4z < 12\}.$$

   Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und geben Sie das Volumen mit Hilfe eines Bereichsintegrals in (x, y, z) an. Das Integral ist nicht zu berechnen.

   Lösung.



   Die Integralgrenzen sind $x \in [0, 12 - 2y - 4z]$, $y \in [0, 6 - 2z]$ und $z \in [0, 3]$. Damit kann man das Volumen als Bereichsintegral folgendermaßen angeben.

   $$\int_B 1 \mathrm{d}V = \int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{12-2y-4z} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

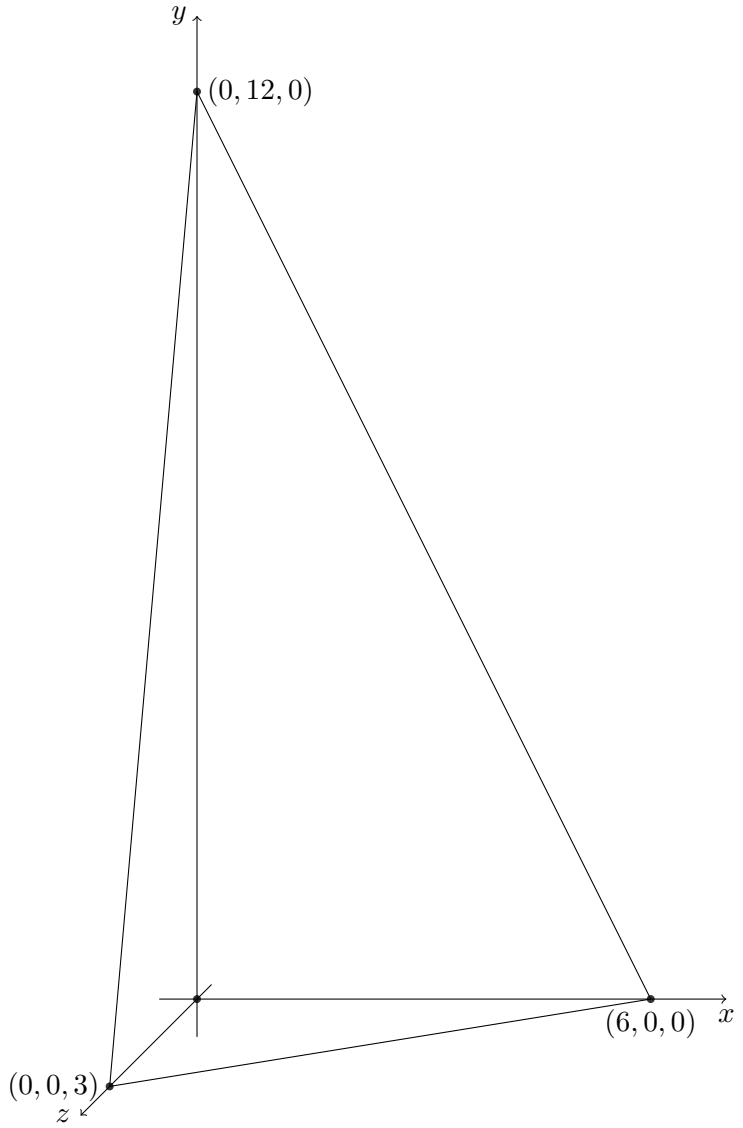
Gruppe B

Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0, 2x + y + 4z < 12\}.$$

Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und geben Sie das Volumen mit Hilfe eines Bereichsintegrals in (x, y, z) an. Das Integral ist nicht zu berechnen.

Lösung.



Die Integralgrenzen sind $y \in [0, 12 - 2x - 4z]$, $x \in [0, 6 - 2z]$ und $z \in [0, 3]$. Damit kann man das Volumen als Bereichsintegral folgendermaßen angeben.

$$\int_B 1 \mathrm{d}V = \int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{12-2x-4z} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z$$

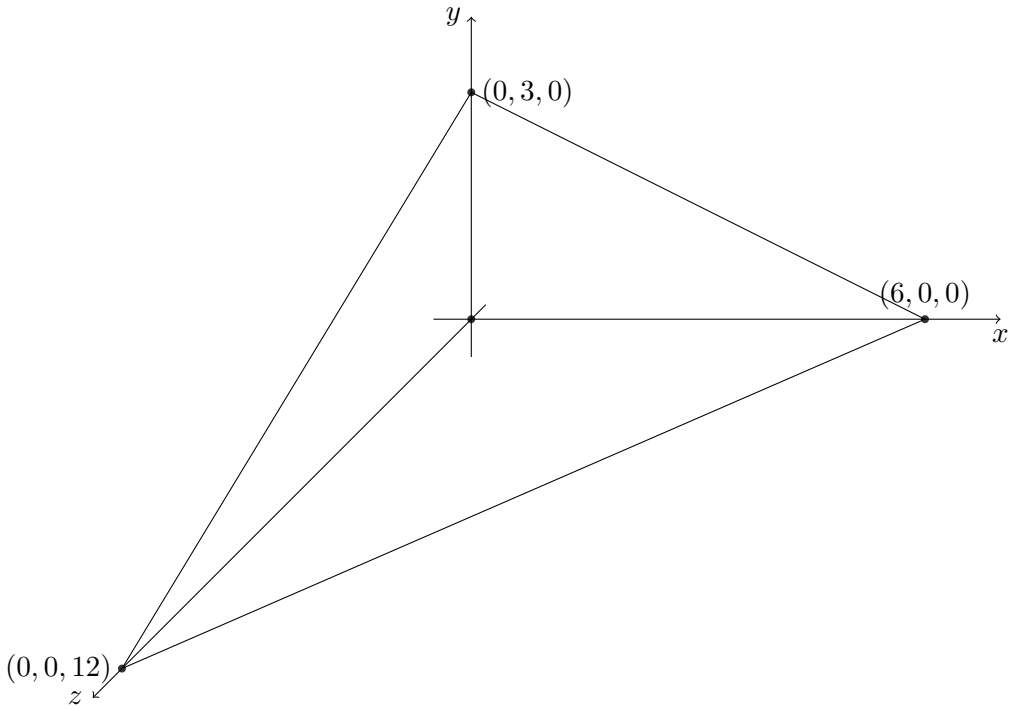
Gruppe C

Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0, 2x + 4y + z < 12\}.$$

Skizzieren Sie den Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ und geben Sie das Volumen mit Hilfe eines Bereichsintegrals in (x, y, z) an. Das Integral ist nicht zu berechnen.

Lösung.



Die Integralgrenzen sind $z \in [0, 12 - 2x - 4y]$, $x \in [0, 6 - 2y]$ und $y \in [0, 3]$. Damit kann man das Volumen als Bereichsintegral folgendermaßen angeben.

$$\int_B 1 \mathrm{d}V = \int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{12-2x-4y} 1 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

2. **Gruppe A & C**

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ gegeben und der Bereich B durch $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 \leq x^2+y^2 \leq 4, y > 0\}$. Betrachten Sie das Bereichsintegral

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(a) Beschreiben Sie das Bereichsintegral als iterierte Integrale in kartesischen Koordinaten, welche aber nicht berechnet werden sollen.

(b) Berechnen Sie das Bereichsintegral mit Hilfe der Verwendung von Polarkoordinaten.

Lösung.

(a) Es handelt sich beim Bereich B um eine halbe Kreisscheibe. Um das Bereichsintegral anzugeben, müssen wir das Integral des äußeren Halbkreises minus das des inneren beschreiben. Da $2 \leq x^2+y^2 \leq 4$ und $y > 0$ folgt für den äußeren Halbkreis $y \in [0, \sqrt{4-x^2}]$ und $x \in [-2,2]$ und für den inneren $y \in [0, \sqrt{2-x^2}]$ und $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Damit folgt

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

(b) Unter Verwendung von Polarkoordinaten folgt $f(r,\varphi) = r$. Da $y = r\sin\varphi > 0$ gilt $\varphi \in [0,\pi]$. Für r haben wir die Grenzen $r \in [\sqrt{2}, 2]$. Damit gilt

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^{\pi}\int_{\sqrt{2}}^{2} r \cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \pi\left(\tfrac{2^3}{3} - \tfrac{2^{3/2}}{3}\right).$$

Gruppe B

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x,y) = x^2+y^2$ gegeben und der Bereich B durch $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 \leq x^2+y^2 \leq 4, x > 0\}$. Betrachten Sie das Bereichsintegral

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(a) Beschreiben Sie das Bereichsintegral als iterierte Integrale in kartesischen Koordinaten, welche aber nicht berechnet werden sollen.

(b) Berechnen Sie das Bereichsintegral mit Hilfe der Verwendung von Polarkoordinaten.

Lösung.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-y^2}} x^2+y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(b) $\pi\left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{4}\right) = 3\pi$

3. **Gruppe A & B**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{y} + 3y = 6$$

mit der homogenen Lösung $y_{\mathrm{h}}(t) = c_0 \mathrm{e}^{-3t}$.

(a) Weisen Sie nach, dass y_{h} eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

(b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

Lösung.

(a) Es gilt $\dot{y_{\mathrm{h}}} = -3c_0 \mathrm{e}^{-3t}$, woraus folgt

$$-3c_0 \mathrm{e}^{-3t} + 3c_0 \mathrm{e}^{-3t} = 0.$$

Dies bestätigt. dass y_{h} eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

(b) Mit $y_p(t) = c(t)\mathrm{e}^{-3t}$ folgt $\dot{y}_p = \dot{c}\mathrm{e}^{-3t} - 3c\mathrm{e}^{-3t}$. Eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$\dot{c}\mathrm{e}^{-3t} - 3c\mathrm{e}^{-3t} + 3c\mathrm{e}^{-3t} = 6.$$

Es gilt also $\dot{c} = 6\mathrm{e}^{3t}$, also $c(t) = 2\mathrm{e}^{3t}$. Damit ist $y_p(t) = c(t)\mathrm{e}^{-3t} = 2$.

Gruppe C

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{y} + 2y = 4$$

mit der homogenen Lösung $y_{\mathrm{h}}(t) = c_0 \mathrm{e}^{-2t}$.

(a) Weisen Sie nach, dass y_{h} eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

(b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

Lösung

(a) Nachrechnen.

(b) $y_p(t) = 2$

4. **Gruppe A & C**

Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = f(t).$$

(a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung.

(b) Weisen Sie nach, dass die in (a) bestimmten Lösungen $\{y_1, y_2\}$ linear unabhängig sind.

(c) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = 5\mathrm{e}^{-3t}$ eine partikuläre Lösung.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom für die homogene Gleichung lautet $\lambda^2 + \lambda - 6$. Die Nullstellen sind $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$. Das Fundamentalsystem lautet damit $\{\mathrm{e}^{-3t}, \mathrm{e}^{2t}\}$.

(b) Die Wronski Determinante lautet

$$\det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{2t} \\ -3\mathrm{e}^{-3t} & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = 2\mathrm{e}^{(-3+2)t} + 3\mathrm{e}^{(-3+2)t} = 5\mathrm{e}^{t} \neq 0.$$

(c) Hier handelt es sich um eine äußere Resonanz, dementsprechend ist der Ansatz für die partikuläre Lösung $y_p(t) = C\,t\,\mathrm{e}^{-3t}$. Zuerst berechnen wir die Ableitungen.

$$\begin{aligned} \dot{y}_p(t) &= C\,\mathrm{e}^{-3t} - 3Ct\,\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-3t}(C - 3Ct) \\ \ddot{y}_p(t) &= -3C\,\mathrm{e}^{-3t} - 3(C - 3Ct)\mathrm{e}^{-3t} = \mathrm{e}^{-3t}(-6C + 9Ct) \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen in die Gleichung können wir C bestimmen.

$$(-6C + 9Ct)\mathrm{e}^{-3t} + (C - 3Ct)\mathrm{e}^{-3t} - 6Ct\mathrm{e}^{-3t} = 5\mathrm{e}^{-3t}.$$

Damit ergibt sich $C = -1$ und die partikuläre Lösung lautet

$$y_p(t) = -t\mathrm{e}^{-3t}.$$

Gruppe B

Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = f(t).$$

(a) Bestimmen Sie das Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung.

(b) Weisen Sie nach, dass die in (a) bestimmten Lösungen $\{y_1, y_2\}$ linear unabhängig sind.

(c) Bestimmen Sie für die Inhomogenität $f(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ eine partikuläre Lösung.

Lösung

(a) Hier tritt innere Resonanz auf. $\{\mathrm{e}^{-3t}, t\mathrm{e}^{-3t}\}$

(b) Nachrechnen der Wronski Determinante.

(c) $y_p(t) = \mathrm{e}^{-2t}$

5. **Gruppe A & B**

Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < \pi, \\ -x + 2\pi, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Begründen Sie, welche der folgenden Formeln für die Fourier-Approximation f_n für die gegebene Funktion f, mit $a_0, a_k, b_k \neq 0$, richtig sind:

(i) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(ii) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

(iii) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(iv) $f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

(v) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$

(vi) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

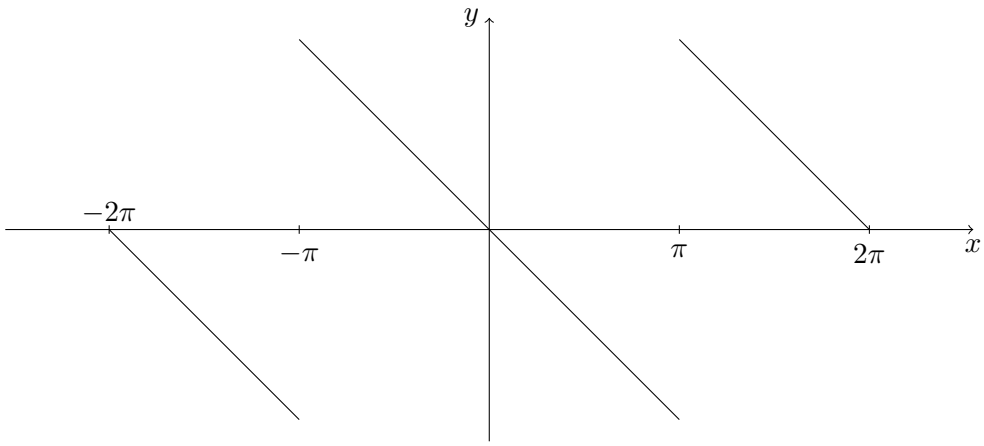
Geben Sie Berechnungsformeln für die von Null verschiebenden Koeffizienten der Fourier-Approximation an und setzen Sie passend ein. Die Berechnung ist nicht durchzuführen!

Lösung.

(a) Siehe nächste Seite oben.

(b) Aus der Skizze sieht man, dass f eine ungerade Funktion ist. Damit sind $a_0 = a_k = 0$. Daher ist (vi) die richtige Antwort. Die Berechnungsformel für die b_k ist

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} -x \sin(kx) \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-x + 2\pi) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right).$$



Gruppe C

Betrachten Sie die Funktion f auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi, \\ x - 2\pi, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases}$$

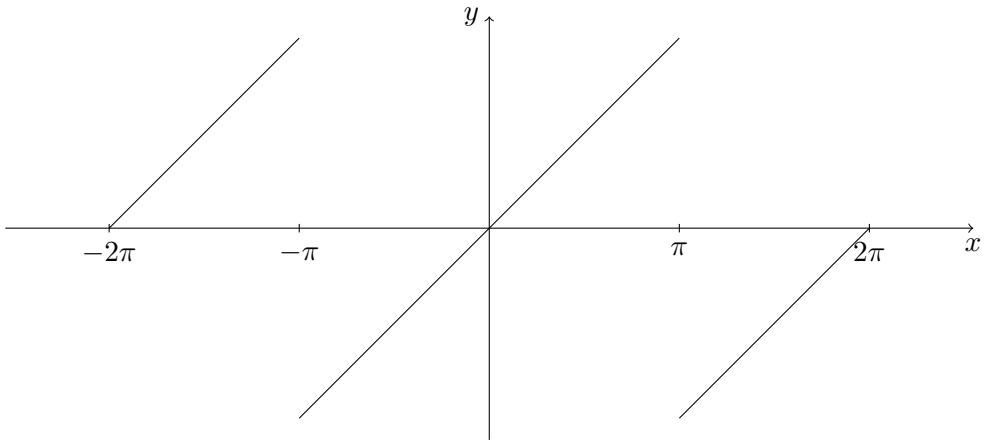
welche außerhalb des Intervalls periodisch fortgesetzt wird.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) siehe Gruppe A & B

Lösung.

(a)



(b) Aus der Skizze sieht man, dass f eine ungerade Funktion ist. Damit sind $a_0 = a_k = 0$. Daher ist (vi) die richtige Antwort. Die Berechnungsformel für die b_k ist

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} x \sin(kx) \, \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\pi) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \right).$$