Pflichtbeispiel: Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy^3 + 12x^3 \\ 6x^2y^2 + 15y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie, ob $\boldsymbol{f}$ ein Gradientenfeld darstellt.

(b) Berechnen Sie das Potential Φ, sodass $\boldsymbol{f} = \nabla\Phi$ gilt.

---

1. Bestimmen Sie das Potential φ zu dem Gradientenfeld

$$\boldsymbol{f} = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 12x^3y^2 + 4x^3 \\ 6x^4y + 6y^2 \end{pmatrix}.$$

2. Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder

$$\boldsymbol{F_1}(x,y) = \left(2x - y, x^2\right)^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F_2}(x,y,z) = (yz, xz, xy)^T$$

Gradientenfelder sind und berechnen Sie gegebenenfalls das Potential.

3. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)^T$ entlang der Kurve

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, t \in [0,\pi] \right\}.$$

4. Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{F} = (yz, xz, xy)^T$. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ entlang des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0,0)^T$,$(3,4,5)^T$,$(2,-2,-1)^T$, wobei die Eckpunkte in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden.

5. Gegeben ist ein Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 6x^5z^5 + 7x^6y^2 + 6x^5 \\ 2x^7y + 3y^2z^2 + 2y \\ 5x^6z^4 + 2y^3z + 2z \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften muss das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ haben, damit ein Potential φ mit Gradientenfeld $\boldsymbol{f}$ existiert? Bestimmen Sie das Potential φ zu dem Gradientenfeld $\boldsymbol{f}$.

6. Gegeben sei ein Parameterintegral

$$I(x) = \int_x^{2x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}y.$$

Berechnen Sie die Ableitung des Parameterintegrals auf zwei Arten: zuerst Integrieren, dann Differenzieren und umgekehrt.

7. Berechnen Sie die Fläche des Rechtecks $R = [0,3] \times [0,7]$ und das Integral

$$\int_R 5x^2y^3 \mathrm{d}A.$$

8. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks D gegeben durch die Eckpunkte $A = (0,0), B = (2,0), C = (2,3)$ und das Integral

$$\int_D 5x^2y^3 \mathrm{d}A$$

Lösungen

1. $\varphi(x,y) = 3x^4y^2 + x^4 + 2y^3 + c$
2. $\boldsymbol{F_1}$ ist kein Gradientenfeld, $\Phi_2(x,y,z) = xyz + c$
3. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$
4. $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$
5. Das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ ist stetig, stetig differenzierbar und wirbelfrei.
   $\varphi(x,y,z) = x^6z^5 + x^7y^2 + x^6 + y^3z^2 + y^2 + z^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$
6. $I(x) = -\cos(2) + \cos(1)$
7. $A = 21, \displaystyle\int_R 5x^2y^3 \mathrm{d}A = \frac{108045}{4}$
8. $A = 3, \displaystyle\int_D 5x^2y^3 \mathrm{d}A = \frac{810}{7}$