Pflichtbeispiel: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) - \tan(5x-9) = 0.$$

1. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin(t).$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

2. Bestimmen Sie die homogene Lösung, eine partikuläre Lösung und die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + \frac{x(t)}{t} = \mathrm{e}^t.$$

3. Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = -\frac{y}{x}.$$

Skizzieren Sie das passende Richtungsfeld und bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gegbenen Differentialgleichung.

4. Gegeben ist die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = t(1+y).$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$.

5. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -2x(t)\sin(t)$$

Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung und die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 2$.

6. Geben Sie die Lösung $x(t)$ der folgenden Differentialgleichung an.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\sin(x(t))}$$

7. Sei $t > 0$. Weisen Sie nach, dass $y_1(t) = C_1$ und $y_2(t) = C_2 \ln(t)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$t^2 y'' + t y' = 0$$

sind. Zeigen Sie weiters die lineare Unabhängigkeit von $\{y_1, y_2\}$.

8. Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Verifizieren Sie die folgenden drei Typen der Lösung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + py' + qy = 0$$

gemäß Satz 5.2 (lt. Skriptum PM1). Dazu seien $\lambda_i, i \in \{1, 2\}$ die Lösungen von

$$\lambda_i^2 + p\lambda_i + q = 0.$$

(a) Der Fall $p^2 > 4q$ führt auf $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die Lösung lautet in diesem Fall

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

(b) Der Fall $p^2 = 4q$ führt auf $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{p}{2} \in \mathbb{R}$. Die Lösung lautet in diesem Fall

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + C_2 t \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

(c) Der Fall $p^2 < 4q$ führt auf $\lambda_1 \neq \lambda_2$ konjugiert komplex. Mit $\omega = \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q}$ lautet die Lösung in diesem Fall

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t} \cos(\omega t) + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{p}{2}t} \sin(\omega t).$$

Lösungen

1. $y(t) = c\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{\sin(t)}{2} - \frac{\cos(t)}{2}$
2. $x(t) = \frac{(t-1)\mathrm{e}^t + c}{t}$
3. $y(x) = \frac{c}{x}$
4. $y(t) = c\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 1$
5. $x(t) = \frac{2}{\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^{2\cos(t)}$
6. $x(t) = \arccos(\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} + c)$
7. Ja, y_1 und y_2 sind linear unabhängige Lösungen.
8. Die Lösungen der einzelnen Typen sind linear unabhängig.