Praktische Mathematik 1 für TPH **3. Klausur** 12.01.2024
Gruppe A

1. Betrachten Sie für $y = y(x)$ die Differentialgleichung

$$y\cos(xy) + 8x + (x\cos(xy) - 3)y' = 0.$$

(a) Begründen Sie, warum die Differentialgleichung exakt ist.

(b) Bestimmen Sie ein erstes Integral.

Lösung.

(a) Wir zeigen, dass die Integrablilitätsbedingungen erfüllt sind.
Für $p(x,y) = y\cos(xy) + 8x$ und $q(x,y) = x\cos(xy) - 3$ muss gelten, dass

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Die Bedingungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(y\cos(xy) + 8x) &= \cos(xy) - xy\sin(xy),\\ \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy) - 3) &= \cos(xy) - xy\sin(xy). \quad \checkmark\end{aligned}$$

Damit ist die Differentialgleichung exakt.

(b) Wir suchen ein Skalarfeld Φ mit $\Phi_x = p$ und $\Phi_y = q$.

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int p(x,y)\ \mathrm{d}x = \int y\cos(xy) + 8x\ \mathrm{d}x\\ &= \sin(xy) + 4x^2 + c(y)\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\Phi_y(x,y) = x\cos(xy) + c'(y).$$

Wegen $\Phi_y = q$ bekommen wir

$$c'(y) = -3.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\Phi(x,y) = \sin(xy) + 4x^2 - 3y + c_0.$$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$tu_t = \frac{1}{1+x} u_x,$$

wobei $u = u(x,t)$. Zusätzlich ist die Randbedingung $u(0,t) = 5t^2 + 2t$ gegeben.

Verwenden Sie den Separationsansatz und berechnen Sie damit die Lösung der gegebenen Gleichung unter Berücksichtigung der Randbedingung.

Lösung.
Unter Verwendung des Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ ergibt sich die Differentialgleichung als

$$t\dot{v}(t)w(x) = \frac{1}{1+x} v(t)w'(x)$$

$$t\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \frac{1}{1+x}\frac{w'}{w(x)} = \kappa$$

Damit ergeben sich die beiden Differentialgleichungen

$$\dot{v}(t) = \frac{\kappa}{t},$$
$$w'(x) = \kappa(1+x)w(x).$$

Mithilfe von Trennung der Variablen erhält man die Lösungen

$$v(t) = c_1 t^\kappa,$$
$$w(x) = c_2 t^\kappa \mathrm{e}^{\kappa\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}.$$

Die Lösung lautet also

$$u(x,t) = ct^\kappa \mathrm{e}^{\kappa\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}$$

Mit der Randbedingung

$$u(0,t) = c_1 t^{\kappa_1} + c_2 t^{\kappa_2} \overset{!}{=} 5t^2 + 2t$$

lassen sich noch die Konstanten bestimmen als

$$c_1 = 5, \kappa_1 = 2, \quad c_2 = 2, \kappa_2 = 1.$$

Wir erhalten daher insgesamt

$$u(x,t) = 5t^2 \mathrm{e}^{2\left(x+\frac{x^2}{2}\right)} + 2t\mathrm{e}^{\left(x+\frac{x^2}{2}\right)}.$$

3. Betrachten Sie für $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, die Differentialgleichung

$$t^3\ddot{y} + 4t^2\dot{y} - 4ty = 4.$$

(a) Berechnen Sie die homogene Lösung y_h der Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$y(t) = t^\alpha.$$

(b) Berechnen Sie eine Partikulärlösung y_p mit Hilfe der Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

(c) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

um.

Lösung.

(a) Mit Hilfe des Ansatzes $y(t) = t^\alpha$ erhalten wir für die Ableitungen

$$\dot{y}(t) = \alpha t^{\alpha-1}, \quad \ddot{y}(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} &t^3\ddot{y} + 4t^2\dot{y} - 4ty = 0, \\ &\alpha(\alpha-1)t^{\alpha+1} + 4\alpha t^{\alpha+1} - 4t^{\alpha+1} = 0, \\ &(\alpha^2 - \alpha + 4\alpha - 4)t^{\alpha+1} = 0. \end{aligned}$$

Aus $\alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0$ folgt $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = -4$. Damit lautet die homogene Lösung

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t^{-4}.$$

(b) Wir bestimmen die Partikulärlösung mit Variation der Konstanten, wir machen also den Ansatz

$$y_p(t) = c_1(t)t + c_2(t)t^{-4}.$$

Die Ableitung ergibt sich als

$$\dot{y}_p = \dot{c}_1 t + c_1 + \dot{c}_2 t^{-4} - 4c_2 t^{-5}.$$

Unter Verwendung von

$$\dot{c}_1 t + \dot{c}_2 t^{-4} = 0$$

können wir die Ableitung vereinfachen und bekommen

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= c_1 - 4c_2 t^{-5}, \\ \ddot{y}_p &= \dot{c} - 4\dot{c}_2 t^{-5} + 20c_2 t^{-6}. \end{aligned}$$

Die berechneten Ableitungen setzen wir nun in die Differentialgleichung ein. Dazu dividieren wir die Differentialgleichung zuerst durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung, d.h. wir verwenden die Gleichung

$$\ddot{y} + 4t^{-1}\dot{y} - 4t^{-2}y = 4t^{-3}.$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&(\dot{c}_1 - \dot{c}_2 4t^{-5} + 20c_2t^{-6}) + 4t^{-1}(c_1 - c_2 4t^{-5}) - 4t^{-2}(c_1 t + c_2 t^{-4}) = 4t^{-3},\\
&t^{-6}(20c_2 - 16c_2 - 4c_2) + t^{-5}(-4\dot{c}_2) + t^{-1}(4c_1 - 4c_1) + \dot{c}_1 = 4t^{-3},\\
&\dot{c}_1 - 4\dot{c}_2 t^{-5} = 4t^{-3}.
\end{aligned}
$$

Gemeinsam mit der Bedingung $\dot{c}_1 t + \dot{c}_2 t^{-4} = 0$ ergibt sich das Lineare Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} t & t^{-4} \\ 1 & -4t^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t^{-3} \end{pmatrix}.
$$

Die Matrix entspricht dabei der Fundamentalmatrix der Differentialgleichung. Lösen dieses Systems ergibt

$$
\begin{aligned}
\dot{c}_1 &= \frac{4}{5}t^{-3}, \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{4}{10}t^{-2},\\
\dot{c}_2 &= -\frac{4}{5}t^{2}, \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{4}{15}t^{3}.
\end{aligned}
$$

Die Partikularlösung lautet damit

$$
y_p(t) = -\frac{2}{5}t^{-2}t - \frac{4}{15}t^3 t^{-4} = -\frac{2}{3}t^{-1}.
$$

Gemeinsam mit der homogenen Lösung können wir nun die allgemeine Lösung angeben als

$$
y(t) = c_1 t + c_2 t^{-4} - \frac{2}{3}t^{-1}.
$$

(c) Wir möchten die Differentialgleichung

$$
t^3\ddot{y} + 4t^2\dot{y} - 4ty = 4
$$

als System anschreiben. Dazu bringen wir sie zuerst in die Form

$$
\ddot{y} = -4t^{-1}\dot{y} + 4t^{-2}y + 4t^{-3}.
$$

Wir definieren nun die Variablen $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$. Dann lässt sich die Differentialgleichung in den neuen Variablen schreiben als

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2,\\
\dot{x_2} &= -4t^{-1}x_2 + 4t^{-2}x_1 + 4t^{-3}.
\end{aligned}
$$

In der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ lautet diese dann

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4t^{-2} & -4t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4t^{-3} \end{pmatrix}.
$$