Praktische Mathematik 1 für TPH **3. Klausur** 12.01.2024
Gruppe B

1. Betrachten Sie für $y = y(x)$ die Differentialgleichung

$$y\sin(xy) - 2 + (x\sin(xy) + 10)y' = 0.$$

   (a) Begründen Sie, warum die Differentialgleichung exakt ist.

   (b) Bestimmen Sie ein erstes Integral.

Lösung.

(a) Wir zeigen, dass die Integrablilitätsbedingungen erfüllt sind.
Für $p(x,y) = y\sin(xy) - 2$ und $q(x,y) = x\sin(xy) + 10$ muss gelten, dass

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Die Bedingungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(y\sin(xy) - 2) &= \sin(xy) - xy\cos(xy),\\ \frac{\partial}{\partial x}(x\sin(xy) + 10) &= \sin(xy) - xy\cos(xy). \quad \checkmark\end{aligned}$$

Damit ist die Differentialgleichung exakt.

(b) Wir suchen ein Skalarfeld Φ mit $\Phi_x = p$ und $\Phi_y = q$.

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \int p(x,y)\ \mathrm{d}x = \int y\sin(xy) - 2\ \mathrm{d}x\\ &= -\cos(xy) - 2x + c(y)\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\Phi_y(x,y) = x\sin(xy) + c'(y).$$

Wegen $\Phi_y = q$ bekommen wir

$$c'(y) = 10.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\Phi(x,y) = -\cos(xy) - 2x + 10y + c_0.$$

2. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$xu_x = (1+t)u_t,$$

wobei $u = u(x,t)$. Zusätzlich ist die Randbedingung $u(x,0) = 4x^3 + x^2$ gegeben.

Verwenden Sie den Separationsansatz und berechnen Sie damit die Lösung der gegebenen Gleichung unter Berücksichtigung der Randbedingung.

Lösung.
Unter Verwendung des Separationsansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ ergibt sich die Differentialgleichung als

$$xv(t)w'(x) = (1+t)\dot{v}(t)w(x)$$
$$x\frac{w'(x)}{w(x)} = (1+t)\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \kappa$$

Damit ergeben sich die beiden Differentialgleichungen

$$\dot{v}(t) = \frac{\kappa}{1+t},$$
$$w'(x) = \frac{\kappa}{x})w(x).$$

Mithilfe von Trennung der Variablen erhält man die Lösungen

$$v(t) = c_1(1+t)^\kappa,$$
$$w(x) = c_2 x^\kappa.$$

Die Lösung lautet also

$$u(x,t) = c(1+t)^\kappa x^\kappa$$

Mit der Randbedingung

$$u(x,0) = c_1 x^{\kappa_1} + c_2 x^{\kappa_2} \stackrel{!}{=} 4x^3 + x^2$$

lassen sich noch die Konstanten bestimmen als

$$c_1 = 4, \kappa_1 = 3, \quad c_2 = 1, \kappa_2 = 2.$$

Wir erhalten daher insgesamt

$$u(x,t) = 4(1+t)^3x^3 + (1+t)^2x^2.$$

3. Betrachten Sie für $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, die Differentialgleichung

$$t^3\ddot{y} + 3t^2\dot{y} - 3ty = 3.$$

(a) Berechnen Sie die homogene Lösung y_h der Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$y(t) = t^\alpha.$$

(b) Berechnen Sie eine Partikulärlösung y_p mit Hilfe der Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

(c) Schreiben Sie die Differentialgleichung in ein System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

um.

Lösung.

(a) Mit Hilfe des Ansatzes $y(t) = t^\alpha$ erhalten wir für die Ableitungen

$$\dot{y}(t) = \alpha t^{\alpha-1}, \quad \ddot{y}(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} &t^3\ddot{y} + 3t^2\dot{y} - 3ty = 0, \\ &\alpha(\alpha-1)t^{\alpha+1} + 3\alpha t^{\alpha+1} - 3t^{\alpha+1} = 0, \\ &(\alpha^2 + 2\alpha - 3)t^{\alpha+1} = 0. \end{aligned}$$

Aus $\alpha^2 + 2\alpha - 3$ folgt $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = -3$. Damit lautet die homogene Lösung

$$y_h(t) = c_1 t^{-3} + c_2 t.$$

(b) Wir bestimmen die Partikulärlösung mit Variation der Konstanten, wir machen also den Ansatz

$$y_p(t) = c_1(t)t^{-3} + c_2(t)t.$$

Die Ableitung ergibt sich als

$$\dot{y}_p = \dot{c}_1 t^{-3} - 3c_1 t^{-4} + \dot{c}_2 t + c_2.$$

Unter Verwendung von

$$\dot{c}_1 t^{-3} + \dot{c}_2 t = 0$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= -3c_1 t^{-4} + c_2, \\ \ddot{y}_p &= -3\dot{c}_1 t^{-4} + 12c_1 t^{-5} + \dot{c}_2. \end{aligned}$$

Die berechneten Ableitungen setzen wir nun in die Differentialgleichung ein. Dazu dividieren wir die Differentialgleichung zuerst durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung, d.h. wir verwenden die Gleichung

$$\ddot{y} + 3t^{-1}\dot{y} - 3t^{-2}y = 3t^{-3}.$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&(-3\dot{c}_1 t^{-4} + 12c_1 t^{-5} + \dot{c}_2) + 3t^{-1}(-3c_1 t^{-4} + c_2) - 3t^{-2}(c_1 t^{-3} + c_2 t) = 3t^{-3} \\
&t^{-4}(-3\dot{c}_1) + t^{-5}(12c_1 - 9c_1 - 3c_1) + \dot{c}_2 + t^{-1}(3c_2 - 3c_2) = 3t^{-3} \\
&-3\dot{c}_1 t^{-4} + \dot{c}_2 = 3t^{-3}
\end{aligned}
$$

Gemeinsam mit der Bedingung $\dot{c}_1 t^{-3} + \dot{c}_2 t = 0$ ergibt sich das Lineare Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} t^{-3} & t \\ -3t^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^{-3} \end{pmatrix}.
$$

Die Matrix entspricht dabei der Fundamentalmatrix der Differentialgleichung. Lösen dieses Systems ergibt

$$
\dot{c}_1 = -\frac{3}{4}t, \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{3}{8}t^2,
$$

$$
\dot{c}_2 = \frac{3}{4}t^{-3}, \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{8}t^{-2}.
$$

Die Partikularlösung lautet damit

$$
y_p(t) = -\frac{3}{8}t^2 t^{-3} - \frac{3}{8}t^{-2}t = -\frac{3}{4}t^{-1}.
$$

Gemeinsam mit der homogenen Lösung können wir nun die allgemeine Lösung angeben als

$$
y(t) = c_1 t^{-3} + c_2 t - \frac{3}{4}t.
$$

(c) Wir möchten die Differentialgleichung

$$
t^3 \ddot{y} + 3t^2 \dot{y} - 3ty = 3
$$

als System anschreiben. Dazu formen wir sie zuerst um auf die Form

$$
\ddot{y} = -3t^{-1}\dot{y} - 3t^{-2}y + 3t^{-3}
$$

definieren wir die Variablen $x_1 = y$ und $x_2 = \dot{y}$. Damit lässt sich die Differentialgleichung schreiben als

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1} &= x_2, \\
\dot{x_2} &= -3t^{-1}x_2 - 3t^{-2}x_1 + 3t^{-3}.
\end{aligned}
$$

In der Form $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$ lautet diese

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3t^{-2} & -3t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^{-3} \end{pmatrix}.
$$