Pflichtbeispiel:

(a) Gegeben sei eine Strecke C von Punkt $A = (1,1)^{\mathrm{T}}$ nach $B = (3,-2)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie die Parameterdarstellung der Strecke C, sowie deren Bogenlänge.

(b) Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x,y) = (2x-y, x^2)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie entsprechend die Rotation und Divergenz des Vektorfeldes.

---

1. (a) Die Bahn eines Massepunktes sei gegeben durch $\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2+7, 2t^3-1, t\right)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$.
   (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die rechte Hälfte des Kreises mit dem Mittelpunkt $(3,-1)$ und dem Radius 2, wobei der Halbkreis im Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.

2. (a) Die Geschwindigkeit eines Massepunktes sei gegeben durch $\boldsymbol{v}(t) = \left(1, t, 3t^2\right)^{\mathrm{T}}$ und seine Position zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $\boldsymbol{r}(0) = (1,0,1)^{\mathrm{T}}$. Bestimmen Sie die Bahn des Massepunktes.
   (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Bahnkurve aus (a) zum Zeitpunkt $t = 2$.

3. Gegeben sei die Kurve $\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(t+1, t^2+1\right)^{\mathrm{T}}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen die Parametrisierung erfüllt, und weisen Sie dies nach:

$$(x-1)^2 - y = 1 \tag{1}$$
$$x^2 - (y-1)^2 = 1 \tag{2}$$
$$y - (x-1)^2 = 1 \tag{3}$$

   Bestimmen Sie weiters die Funktion f, um $y = f(x)$ explizit anzugeben. Geben Sie außerdem die zugehörigen Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$, sowie die Gleichung der Tangente $y = T(x)$ an die Kurve im Punkt $(x,y)^{\mathrm{T}} = (3,5)^{\mathrm{T}}$ an. Zuletzt bestimmen Sie die Gleichung der zur Tangente orthogonalen Geraden $y = h(x)$ durch den Punkt $(x,y)^{\mathrm{T}} = (3,5)^{\mathrm{T}}$.

4. Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ in Richtung $\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ i $(1,1)$. Skizzieren Sie die Höhenschichtenlinie, auf der $(1,1)$ liegt und zeichnen Sie auch $\nabla f(1,1)$ als kleinen Pfeil ein.

5. Sei f ein Skalarfeld gegeben durch $f(\boldsymbol{r}) = f(x,y) = x^2 + xy - 3y^2 + x - 3y + 1$.

   (a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

   (b) Berechnen Sie die Tangentialebene für $\boldsymbol{r_0} := (x_0, y_0) = (-1,1)$.

   (c) Berechnen Sie das totale Differential von $z = f(x,y)$.

(d) Berechnen Sie den Gradienten und das totale Differential an $\boldsymbol{r_0}$, sowie

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{|\nabla f(\boldsymbol{r_0})|} \nabla f(\boldsymbol{r_0}).$$

(e) Berechnen Sie für $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$

$$\Delta z_1 = f(\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{g}) - f(\boldsymbol{r_0}), \qquad \Delta z_2 = f(\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{w}) - f(\boldsymbol{r_0}).$$

6. Sei $h\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(t) = (\cos t)^{\sin t}$. Berechnen Sie die Ableitung h' auf zwei Arten:

   (a) Durch Differenzieren von h mit Hilfe der Ableitungsregeln.

   (b) Anwendung der Kettenregel auf $h = f \circ \boldsymbol{r}$ mit

   $$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(x, y) = x^y.$$

   Geben Sie geeignete Definitionsbereiche für $\boldsymbol{r}$ und f an.

7. Gegeben sei die Kurve

   $$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(5t) \\ 3\cos(5t) \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

   Berechnen Sie die Funktion der Bogenlänge $s = s(t)$ und die gesamte Bogenlänge L.

8. Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (4x^4, 2y^2z^2, z^2x^7)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\boldsymbol{F}$.

Lösungen

1. (a) $|\boldsymbol{v}(1)| = \sqrt{41}$, (b) $\boldsymbol{r}(\varphi) = (3 + 2\cos\varphi, -1 - 2\sin\varphi)^{\mathrm{T}}$

2. (a) $\boldsymbol{r}(t) = \left(t + 1, \frac{t^2}{2}, t^3 + 1\right)^{\mathrm{T}}$, (b) $\boldsymbol{T}(t) = (1 + t, -2 + 2t, -15 + 12t)^{\mathrm{T}}$.

3. $T(x) = 4x - 7$, $h(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$

4. $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = -3\sqrt{2}$

5. (a) $\nabla f(\boldsymbol{r}) = (2x + y + 1, x - 6y - 3)^{\mathrm{T}}$,
   (b) $10y + z = 4$,
   (c) $\mathrm{d}z = (2x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (x - 6y - 3)\,\mathrm{d}y$,
   (d) $\nabla f(\boldsymbol{r_0}) = (0, -10)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{d}z = -10\,\mathrm{d}y$, $\boldsymbol{g} = (0, -1)^{\mathrm{T}}$,
   (e) $\Delta z_1 = 7$, $\Delta z_2 \approx 6{,}5858$

6. (a)+(b) $h'(t) = (\cos t)^{\sin t}\left(\cos t \ln(\cos t) - \frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)$,
   (b) $\boldsymbol{r}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

7. $s(t) = 15t$, $L = 30\pi$

8. $\mathrm{div}(\boldsymbol{F}) = 2x^7 z + 16x^3 + 4yz^2$, $\nabla \times \boldsymbol{F} = (-4y^2 z, -7z^2 x^6, 0)^{\mathrm{T}}$