Pflichtbeispiel: Gegeben sei ein Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2y^2 + 3xy$. Weiters sei das Dreieck D gegeben durch die Eckpunkte $A = (0,0)^{\mathrm{T}}$, $B = (1,0)^{\mathrm{T}}$, $C = (0,1)^{\mathrm{T}}$.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Bereichs B

$$B = D \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und das Integral

$$\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

---

1. Gegeben sei ein Parameterintegral

$$I(x) = \int_x^{2x} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}y.$$

   Berechnen Sie die Ableitung des Parameterintegrals auf zwei Arten: zuerst Integrieren, dann Differenzieren und umgekehrt.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks D gegeben durch die Eckpunkte $A = (0,0)^{\mathrm{T}}, B = (2,0)^{\mathrm{T}}, C = (2,3)^{\mathrm{T}}$ und das Integral

$$\int_D 5x^2y^3 \mathrm{d}A.$$

3. Gegeben sei ein Bereich B, der von dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und der Ebene $z = 1$ begrenzt wird. Berechnen Sie

$$I = \int_B \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}V.$$

4. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_K e^{-z}\,\mathrm{d}V,$$

   mit $K = \{(x,y,z) : z \geq x^2 + y^2\}$.

5. Berechnen Sie das Volumsintegral

$$\int_K (x + y + z)\,\mathrm{d}V,$$

   wobei K der durch die Ungleichungen $x, y, z \geq 0$ und $x+y+z \leq 1$ bestimmte Körper ist.

6. Berechnen Sie das Volumen V des Körpers G von $\mathbb{R}^3$, der entsteht, wenn man aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ den Zylinder $x^2 + y^2 \leq 1$ ausschneidet. Der Körper G ist also gegeben durch

$$G = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Lösungen

1. $I'(x) = -\cos(2) + \cos(1)$
2. $A = 3, \displaystyle\int_D 5x^2y^3 \mathrm{d}A = \frac{810}{7}$
3. $I = \frac{4\pi}{15}$
4. $I = \pi$
5. $I = \frac{1}{8}$
6. $V = \frac{32\sqrt{8}}{3}\pi$