Pflichtbeispiel: Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$4t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung ist mit $x_1(t) = t$ bekannt. Bestimmen Sie mit der Methode der Variation der Konstanten eine zweite, linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung.

---

1. Sei $t > 0$. Weisen Sie nach, dass $y_1(t) = C_1$ und $y_2(t) = C_2 \ln(t)$ Lösungen der Differentialgleichung
$$t^2y'' + ty' = 0$$
sind. Zeigen Sie weiters die lineare Unabhängigkeit von $\{y_1, y_2\}$.

2. Gegeben ist die Differentialgleichung
$$\ddot{x}\,\cos t + x\,\cos t = 1.$$
   (a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem $\{x_1(t), x_2(t)\}$ an.
   (b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung $x_p(t)$.

3. Lösen Sie die Eulersche Differentialgleichung
$$4t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 2t^4,$$
mit den Anfangsbedingungen $x(1) = 0$ und $\dot{x}(1) = 0$.

4. Betrachten Sie für $y = y(t)$ mit $t > 0$ die Differentialgleichung
$$\ddot{y} + \frac{3}{t}\dot{y} + \frac{y}{t^2} = \frac{\ln t}{t^2}.$$
Überprüfen Sie ob es sich um eine Euler-Differentialgleichung handelt und lösen Sie diese.

5. Gegeben sei die Differentialgleichung
$$(4t+1)\ddot{y} + (8t-2)\dot{y} + (-12t-15)y = \mathrm{e}^t,$$
sowie eine homogene Lösung $y_1(t) = \mathrm{e}^{-3t}$. Berechnen Sie mit Hilfe von $y_1(t)$ eine zweite, linear unabhängige Lösung der homogenen Differentialgleichung. Berechnen Sie weiters die Partikulärlösung und geben Sie die allgemeine Lösung an.

6. Betrachten Sie für $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, die Differentialgleichung
$$t^3\ddot{x} + t^2\dot{x} - 4tx = 0.$$

(a) Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$x_1(t) = t^\alpha,$$

mit $\alpha > 0$.

(b) Berechnen Sie eine weitere, linear unabhängige Lösung x_2 unter Zuhilfenahme der Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems für $x(1) = 1$ und $\dot{x}(1) = 1$.

Lösungen

1. Ja, y_1 und y_2 sind linear unabhängige Lösungen.
2. (a) $\{\cos t, \sin t\}$, (b) $\ln(\cos t)\cos t + t\sin t$
3. $x(t) = \frac{8}{45}\sqrt[4]{t} - \frac{2}{9}t + \frac{2}{45}t^4$
4. $y(t) = c_1\frac{1}{t} + c_2\frac{1}{t}\ln t + \ln t - 2$
5. $y(t) = c_1\mathrm{e}^{-3t} + c_2 t\mathrm{e}^{t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{t}$
6. $x(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{t^2}$