Pflichtbeispiel: Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$y\cos(x) + 2x\mathrm{e}^y + (\sin(x) + x^2\mathrm{e}^y - 1)y' = 0.$$

Prüfen Sie zuerst, ob diese Gleichung exakt ist. Berechnen Sie danach ein erstes Integral, also das zur exakten Differentialgleichung gehörende Potential Φ.

---

1. Gegeben sei für $u = u(x,t)$ die folgende partielle Differentialgleichung

$$xu_x = 2u_t.$$

   Lösen Sie die Gleichung mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = 3x^3 + 3x$ unter Verwendung des Separationsansatz.

2. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung

$$2x\mathrm{e}^y - 1 + (x^2\mathrm{e}^y + 1)y' = 0.$$

   Prüfen Sie die Gleichung auf Exaktheit und lösen Sie das Anfangswertproblem $y(1) = 0$.

3. Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ und $y = y(x)$ die Differentialgleichung

$$3x^2 - 2ax + ay - 3y^2y' + axy' = 0.$$

   (a) Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung exakt ist.
   (b) Finden Sie ein Potential als erstes Integral.
   (c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ kann die Lösung $y = y(x)$ angegeben werden? Berechnen Sie diese.

4. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung

$$2x + 4y + 2 + (4x + 12y + 8)y' = 0.$$

   (a) Prüfen Sie, ob diese exakt ist.
   (b) Berechnen Sie ein erstes Integral, also das zur exakten Differentialgleichung gehörende Potential Φ.
   (c) Lösen Sie die Differentialgleichung für $y(0) = -1$.

5. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y(1 + xy) - xy' = 0.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.
   (b) Bestimmen Sie einen geeigneten integrierenden Faktor $a = a(y)$.
   (c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor multipliziert nun exakt ist.
   (d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $\Phi = \Phi(x,y)$.
   (e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung durch den Punkt $(x,y) = (2,-2)$.

6. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(xy^2 + yx\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x + (2x^2y + x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Bestimmen Sie einen geeigneten integrierenden Faktor $a = a(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor multipliziert nun exakt ist.

(d) Bestimmen Sie ein erstes Integral $\Phi = \Phi(x, y)$.

Lösungen

1. $u(x,t) = 3x^3 \mathrm{e}^{\frac{3t}{2}} + 3x\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$
2. $x(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\left(1 + \sqrt{1 - 4y\mathrm{e}^{y}}\right)$
3. (a) exakt (b) $\Phi(x,y) = x^3 - ax^2 + axy + y^3$
4. $\Phi(x,y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + c_0$, $y(t) = \frac{-2-x}{3} - \frac{\sqrt{-2x^2+4x+4}}{6}$
5. $y(x) = \frac{2x}{2-x^2}$
6. $\Phi(x,y) = y^2x + y\mathrm{e}^{x} + C_0$