1. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \,.$$

   (a) Bestimmen Sie die möglichen Extrema von f unter der durch die Gleichung der Hyperbel

$$3\,x^2 - 11\,x\,y + 3\,y^2 = -20$$

   gegebenen Nebenbedingung. (4P)

   (b) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an die durch die Gleichung $z = f(x,y)$ definierten Fläche im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -3)$? (2P)

Lösung:

(a) Mit $f(x,y) = x^2 + y^2$ und $\varphi(x,y) = 3x^2 - 11xy + 3y^2 + 20$ führt die Methode der Langrange-Multiplikatoren auf

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 - 11xy + 3y^2 + 20)\,.$$

Da für alle Punkte, die die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ erfüllen, $\nabla\varphi(x,y) \neq (0,0)$ ist, sind alle möglichen Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} (1) & F_x & = & 2x + \lambda(6x - 11y) = 0 \\ (2) & F_y & = & 2y + \lambda(-11x + 6y) = 0 \\ (3) & F_\lambda & = & 3x^2 - 11xy + 3y^2 + 20 = 0\,. \end{array}$$

Ausrechnen von λ aus (1) und (2) und anschließendes Gleichsetzen führt durch Umformung auf die zwei Lösungsfälle $x = y$ und $x = -y$.

- Für $x = y$ folgt durch Einsetzen in (3)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 11x^2 + 3x^2 &= -20\,, \\ x &= \pm 2\,. \end{aligned}$$

  Damit sind die möglichen Extrema die Punkte $P_1(2,2)$ und $P_2(-2,-2)$.

- Für $x = -y$ folgt

$$\begin{aligned} 3x^2 + 11x^2 + 3x^2 &= -20\,, \\ x^2 &= -\frac{20}{17}\,. \end{aligned}$$

Es sind also P_1 und P_2 die einzigen Lösungen in $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung:
Da die zu maximierende bzw. zu minimierende Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ das Quadrat des Abstandes eines Punktes $P(x,y)$ vom Ursprung und die Nebenbedingung eine Hyperbel beschreibt, sind die möglichen Extrema die Scheitel der Hyperbel und damit Minima.

(b) Mit $z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, -3) = 10$ lässt sich die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, -3, 10)$ angeben durch

$$\begin{aligned} z &= z_0 + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \\ &= z_0 + 2x\big|_{x=x_0}(x - x_0) + 2y\big|_{y=y_0}(y - y_0) \\ &= 10 + 2(x - 1) - 6(y + 4) \\ &= 2x - 6y - 10\,. \end{aligned}$$

□

2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2\,x - 1\,, \qquad x \in [-2\pi, 2\pi)\,.$$

(a) Entwickeln Sie f in eine trigonometrische Fourierreihe (Achtung, die Funktion f muss 4π-periodisch fortgesetzt werden). (4.5P)

(b) Untersuchen Sie die Reihe auf

i. punktweise Konvergenz,

ii. gleichmäßige Konvergenz und

iii. Konvergenz im quadratischen Mittel. (1.5P)

Lösung:

(a) Mit $a = -2\pi, b = 2\pi$ und $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ errechnen sich die Fourierkoeffizienten folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2k\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}(2x-1)\cos\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\underbrace{(2x-1)\frac{2}{k}\sin\frac{kx}{2}\Big|_{-2\pi}^{2\pi}}_{=0} - \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\frac{2}{k}\sin\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x\Big] \;=\; -\frac{2}{k\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\sin\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{k\pi}\big(-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}\big)\Big|_{-2\pi}^{2\pi} \;=\; \frac{4}{k^2\pi}\cos\frac{kx}{2}\Big|_{-2\pi}^{2\pi} \;=\; 0\,, \\
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}(2x-1)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2\pi}(x^2-x)\Big|_{-2\pi}^{2\pi} \;=\; -2\,, \\
b_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2k\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}(2x-1)\sin\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[(2x-1)\big(-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}\big)\Big|_{-2\pi}^{2\pi} - \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\big(-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}\big)\,\mathrm{d}x\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[(4\pi-1)(-\frac{2}{k})\cos(k\pi) - (-4\pi-1)(-\frac{2}{k})\underbrace{\cos(-k\pi)}_{\cos(k\pi)} + \underbrace{\frac{4}{k}\frac{2}{k}\sin\frac{kx}{2}\Big|_{-2\pi}^{2\pi}}_{=0}\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi}\big(-\frac{2}{k}\big)\cos(k\pi)(4\pi+1+4\pi-1) \;=\; -\frac{8}{k}\cos(k\pi) \;=\; -\frac{8}{k}(-1)^k\,.
\end{aligned}$$

Die trigonometrische Fourierreihe ist somit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{2k\pi x}{b-a} + b_k\sin\frac{2k\pi x}{b-a} \;=\; -1 + \sum_{k=1}^{\infty}\big(-\frac{8}{k}\big)(-1)^k\sin\frac{kx}{2}\,.$$

(b) i. Die trigonometrische Fourierreihe konvergiert punktweise gegen $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\pi(1+2k)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$, da an den Sprungstellen $2\pi(1+2k), k \in \mathbb{Z}$, das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert $\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2} = -1 \neq -4\pi - 1 = f(x)$ ist.

ii. Die Fourierreihe konvergiert in jedem kompakten Teilintervall, das keine Sprungstelle enthält, also in Teilintervallen von Intervallen der Form $(2\pi(1+2k), 2\pi(3+2k)), k \in \mathbb{Z}$, gleichmäßig gegen f.

iii. Da $f \in L^2(-2\pi, 2\pi)$ ist, muss die Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen f konvergieren.

□

3. Gegeben sind die Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{3\,z^2 - 4\,\mathrm{i}\,z + 1}{(z-1)(2\,z^2 - 4\,z + 10)}\,,$$

und die beiden einfach geschlossenen Kurven

$$C_1 := \{z\ :\ |z - (-2 + 3\,\mathrm{i})| = 2\}$$

und

$$C_2 := \{z\ :\ |z - 2| = \frac{3}{2}\}$$

(positive Orientierung).

(a) Bestimmen Sie die Polstellen von f sowie deren Ordnungen, und veranschaulichen Sie die beiden Kurven C_1 und C_2 und die Pole in der Gauss'schen Zahlenebene. (2P)

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

(1P)

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

(3P)

Lösung:

(a) Die einfachen Nullstellen des Nenners $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + 2\,\mathrm{i}$, $z_3 = 1 - 2\,\mathrm{i}$ sind keine Nullstellen des Zählers. Daher sind z_1, z_2, z_3 Pole der Ordnung 1.
Die Kurve C_1 ist in der Gauss'schen Zahlenebene ein Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt $-2 + 3\mathrm{i}$, die Kurve C_2 ein Kreis mit Radius $\frac{3}{2}$ und Mittelpunkt 2.

(b) Alle Pole liegen außerhalb des von C_1 berandeten Gebietes. Es existiert also ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in dem f differenzierbar ist, und in dem die Kurve C_1 verläuft. Laut dem Cauchy'schen Integralsatz ist daher

$$\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

(c) Der Pol $z_1 = 1$ mit der Ordnung 1 ist der einzige, der innerhalb des von C_2 berandeten Gebietes liegt. Die Funktion

$$g(z) := f(z)(z - z_1) = \frac{3z^2 - 4\mathrm{i}z + 1}{2z^2 - 4z + 10}$$

ist im Abschluss dieses Gebietes differenzierbar. Mit der Cauchy'schen Integralformel folgt nun

$$g(z_1) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{g(z)}{z - z_1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\; g(z_1) = \pi\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}) = \pi(1 + \mathrm{i})\ .$$

□