Gruppe A

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\,z^2\,\sin z + y\,z\,\cos z \\ y\,\cos z + x\,z\,\cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Stellen $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, in deren Umgebung sich das Gleichungssystem lokal eindeutig nach x, y auflösen lässt, d.h.:
$\exists\, h(z) = (x(z), y(z))$ mit $(x_0, y_0) = h(z_0)$ und

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \pi \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = h(z) \text{ in einer Umgebung von } (x_0, y_0, z_0).$$

(a) ist mittels Analyse der Funktion F zu beantworten, ohne das System explizit aufzulösen. (3P)

(b) Erläutern Sie, wieso die Auflösbarkeit nur vom Wert von z_0 abhängt (aber nicht von x_0, y_0), und geben Sie die allgemeine Lösungsfunktion $h(z) = (x(z), y(z))$ als expliziten Formelausdruck an. (3P)

Lösung:

(a) Mit

$$f(x,y,z) := F(x,y,z) - \begin{pmatrix} \pi \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,z^2\,\sin z + y\,z\,\cos z - \pi \\ y\,\cos z + x\,z\,\cos z - 4 \end{pmatrix},$$

ist

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial(x,y,z)} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} z^2 \sin z & z\cos z & 2xz\sin z + xz^2\cos z + y\cos z - yz\sin z \\ z\cos z & \cos z & -y\sin z + x\cos z - xz\sin z \end{pmatrix},$$

und

$$\det\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial(x,y)}\right) = z^2\cos z(\sin z - \cos z) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$(z = 0) \quad \vee \quad (\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}) \quad \vee \quad (\tan z = 1 \;\Leftrightarrow\; z = \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$.

Da alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und überall stetig sind, ist das Gleichungssystem laut dem Satz über implizite Funktionen für all jene Punkte des $\mathbb{R}^3$ eindeutig in einer Umgebung auflösbar, für die das Gleichungssystem erfüllt ist, und für die die Matrix $\frac{\partial f(x,y)}{\partial(x,y)}$ regulär ist, also für die Punkte

$$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x_0, y_0, z_0) = 0 \;\wedge\; z_0 \notin \{0,\ \pi/2 + k\pi,\ \pi/4 + k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

□

(b) Das Gleichungssystem ist für ein festes z linear in den Variablen x und y, wobei die Koeffizientenmatrix nur von z abhängt, d.h.

$$F(x,y,z) = A(z)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems ist somit davon abhängig, ob die Matrix $A(z)$ regulär ist oder nicht.

Auflösen des linearen Gleichungssystems nach x und y führt auf

$$x(z) = \frac{-\pi + 4z}{z^2(\cos z - \sin z)} \quad \text{und} \quad y(z) = \frac{\pi\cos z - 4z\sin z}{z\cos z(\cos z - \sin z)}.$$

Es ist also

$$h(z) = \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{z^2\cos z(\cos z - \sin z)} \begin{pmatrix} \cos z(-\pi + 4z) \\ z(\pi\cos z - 4z\sin z) \end{pmatrix}.$$

□

2. Im Raum $L^2(-\pi,\pi)$ ist die Funktion
$$f(x) = x^2 - 2$$
gegeben.
Finden Sie die Koeffizienten a, b und c der Funktion
$$g(x) = a + b\,\cos x + c\,\sin x\,,$$
so dass $g(x)$ die Funktion $f(x)$ in $L^2(-\pi,\pi)$ bestmöglichst bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ approximiert. (6P)

Lösung:

Da die Fourierkoeffizienten a_k und b_k genau so gewählt sind, dass das Integral
$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos kx + b_k\sin kx]\Big)^2\,\mathrm{d}x$$
minimal wird, löst die Partialsumme der Fourierreihe das obige Approximationsproblem. Es ist also
$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x\,.$$
Da die Funktion $f(x)$ gerade ist, ergeben sich die Fourierkoefizienten
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 - 2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{x^3}{3} - 2x\Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} - 4\,,\\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-2)\cos x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{(x^2-2)\sin x\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 2x\sin x\,\mathrm{d}x\Big] = -\frac{4}{\pi}\Big[-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x}_{=0}\Big] = -4\,,\\
b_1 &= 0\,.
\end{aligned}$$
Die Funktion $g(x)$, die f(x) in $L^2(-\pi,\pi)$ bezüglich $||\cdot||_2$ bestmöglichst approximiert, ist damit
$$g(x) = \frac{\pi^2}{3} - 2 - 4\cos x\,.$$

□

3. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C \frac{2\,z^2-3}{2\,i-\dfrac{z}{i}}\,\mathrm{d}z\,,$$

wobei C der Kreis $C := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+2| = 1\}$ ist (positive Orientierung).

(a) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe einer geeigneten Parameterisierung des Kreises C. (4P)

(b) Die Aufgabe lässt sich auch viel einfacher lösen, ohne die Integration wie unter (a) explizit auszuführen. Zeigen Sie, wie das geht (genaue Begründung). (2P)

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Parameterdarstellung des Kreises C mit Mittelpunkt bei -2 und Radius 1,

$$z = -2 + e^{it} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}z = i\,e^{it}\,\mathrm{d}t\,,\; 0 \le t \le 2\pi\,,$$

ist

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{2\,z^2-3}{2\,i-\dfrac{z}{i}}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{2\,z^2-3}{2\,i+z\,i}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{2(-2+e^{it})^2-3}{2-2+e^{it}}\,i\,e^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 5-8\,e^{it}+2\,e^{2it}\,\mathrm{d}t = 5t+8i\,e^{it}-i\,e^{2it}\Big|_0^{2\pi} = 10\pi\,.\end{aligned}$$

□

(b) Zum Beispiel mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

erhält man die Lösung des Integrals mit $f(z) = 2z^2-3$ mittels

$$\oint_C \frac{2\,z^2-3}{2\,i-\dfrac{z}{i}}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{2\,z^2-3}{2\,i+z\,i}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\oint_C \frac{2\,z^2-3}{z+2}\,\mathrm{d}z = 2\pi f(-2) = 10\pi\,,$$

da die Polstelle bei $z_0 = -2$ innerhalb des vom Kreis C berandeten Gebietes liegt. □

Gruppe B

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\,z\,\sin z - x\,\sin z \\ x\,z\,\sin z - y\,z^2\,\cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \pi \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Stellen $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, in deren Umgebung sich das Gleichungssystem lokal eindeutig nach x, y auflösen lässt, d.h.:
$\exists\, h(z) = (x(z), y(z))$ mit $(x_0, y_0) = h(z_0)$ und

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4 \\ \pi \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = h(z) \text{ in einer Umgebung von } (x_0, y_0, z_0).$$

(a) ist mittels Analyse der Funktion F zu beantworten, ohne das System explizit aufzulösen. (3P)

(b) Erläutern Sie, wieso die Auflösbarkeit nur vom Wert von z_0 abhängt (aber nicht von x_0, y_0), und geben Sie die allgemeine Lösungsfunktion $h(z) = (x(z), y(z))$ als expliziten Formelausdruck an. (3P)

Lösung:

(a) Mit

$$f(x,y,z) := F(x,y,z) - \begin{pmatrix} -4 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,z\,\sin z - x\,\sin z + 4 \\ x\,z\,\sin z - y\,z^2\,\cos z - \pi \end{pmatrix},$$

ist

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial(x,y,z)} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -\sin z & z\sin z & y\sin z + yz\cos z - x\cos z \\ z\sin z & -z^2\cos z & x\sin z + xz\cos z + yz^2\sin z - 2yz\cos z \end{pmatrix},$$

und

$$\det\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial(x,y)}\right) = z^2\sin z(\cos z - \sin z) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(z=0) \quad \vee \quad (\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi,\; k\in\mathbb{Z}) \quad \vee \quad (\tan z = 1 \;\Leftrightarrow\; z = \pi/4 + k\pi,\; k\in\mathbb{Z}).$$

Da alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung existieren und überall stetig sind, ist das Gleichungssystem laut dem Satz über implizite Funktionen für all jene Punkte des $\mathbb{R}^3$ eindeutig in einer Umgebung auflösbar, für die das Gleichungssystem erfüllt ist, und für die die Matrix $\frac{\partial f(x,y)}{\partial(x,y)}$ regulär ist, also für die Punkte

$$(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x_0,y_0,z_0) = 0 \;\wedge\; z_0 \notin \{0,\, k\pi,\, \pi/4 + k\pi\},\; k\in\mathbb{Z}.$$

□

(b) Das Gleichungssystem ist für ein festes z linear in den Variablen x und y, wobei die Koeffizientenmatrix nur von z abhängt, d.h.

$$F(x,y,z) = A(z)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems ist somit davon abhängig, ob die Matrix $A(z)$ regulär ist oder nicht.

Auflösen des linearen Gleichungssystems nach x und y führt auf

$$x(z) = \frac{\pi\sin z - 4z\cos z}{z\sin z(\sin z - \cos z)} \quad \text{und} \quad y(z) = \frac{\pi - 4z}{z^2(\sin z - \cos z)}.$$

Es ist also

$$h(z) = \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{z^2\sin z(\sin z - \cos z)} \begin{pmatrix} z(\pi\sin z - 4z\cos z) \\ \sin z(\pi - 4z) \end{pmatrix}.$$

□

2. Im Raum $L^2(-\pi,\pi)$ ist die Funktion
$$f(x) = 3 - x^2$$
gegeben.
Finden Sie die Koeffizienten a, b und c der Funktion
$$g(x) = a + b\,\cos x + c\,\sin x\,,$$
so dass $g(x)$ die Funktion $f(x)$ in $L^2(-\pi,\pi)$ bestmöglichst bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ approximiert. (6P)

Lösung:

Da die Fourierkoeffizienten a_k und b_k genau so gewählt sind, dass das Integral
$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos kx + b_k \sin kx]\Big)^2\,\mathrm{d}x$$
minimal wird, löst die Partialsumme der Fourierreihe das obige Approximationsproblem. Es ist also
$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x\,.$$
Da die Funktion $f(x)$ gerade ist, ergeben sich die Fourierkoefizienten
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3 - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big(3x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^{\pi} = 6 - \frac{2\pi^2}{3}\,,\\
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3-x^2)\cos x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{(3-x^2)\sin x\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} -2x\sin x\,\mathrm{d}x\Big] = \frac{4}{\pi}\Big[-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x}_{=0}\Big] = 4\,,\\
b_1 &= 0\,.
\end{aligned}$$
Die Funktion $g(x)$, die f(x) in $L^2(-\pi,\pi)$ bezüglich $||\cdot||_2$ bestmöglichst approximiert, ist damit
$$g(x) = 3 - \frac{\pi^2}{3} + 4\cos x\,.$$

$\square$

3. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C \frac{4 - 3\,z^2}{i\,z + \dfrac{3}{i}}\,\mathrm{d}z\,,$$

wobei C der Kreis $C := \{z \in \mathbb{C} :\ |z-3| = 1\}$ ist (positive Orientierung).

(a) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe einer geeigneten Parameterisierung des Kreises C. (4P)

(b) Die Aufgabe lässt sich auch viel einfacher lösen, ohne die Integration wie unter (a) explizit auszuführen. Zeigen Sie, wie das geht (genaue Begründung). (2P)

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Parameterdarstellung des Kreises C mit Mittelpunkt bei 3 und Radius 1,

$$z = 3 + e^{it} \ \Rightarrow\ \mathrm{d}z = i\,e^{it}\,\mathrm{d}t\,,\ 0 \le t \le 2\pi\,,$$

ist

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{4 - 3\,z^2}{i\,z + \dfrac{3}{i}}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{4 - 3\,z^2}{i\,z - 3\,i}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{4 - 3(3 + e^{it})^2}{3 + e^{it} - 3}\,i\,e^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -23 - 18\,e^{it} - 3\,e^{2it}\,\mathrm{d}t = -23t + 18i\,e^{it} + \frac{3}{2}\,i\,e^{2it}\Big|_0^{2\pi} = -46\pi\,.\end{aligned}$$

□

(b) Zum Beispiel mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

erhält man die Lösung des Integrals mit $f(z) = 4 - 3\,z^2$ mittels

$$\oint_C \frac{4 - 3\,z^2}{i\,z + \dfrac{3}{i}}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{4 - 3\,z^2}{i\,z - 3\,i}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\oint_C \frac{4 - 3\,z^2}{z - 3}\,\mathrm{d}z = 2\pi f(3) = -46\pi\,,$$

da die Polstelle bei $z_0 = 3$ innerhalb des vom Kreis C berandeten Gebietes liegt. □