Inst. f. Analysis u. Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

SS 2008

Analysis II für TPH

1. Kurztest am 16. und 17. 04. 2008

Gruppe MI A

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 3\,x^2 + y^2 - 2\,x\,y - x + 3\,y - 5\,.$$

1. Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f. (1P)
2. In welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion f elliptisch, hyperbolisch, bzw. parabolisch? (1P)
3. Bestimmen Sie die stationären Punkte von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. (2P)
4. Entwickeln Sie die Funktion f in eine Taylorreihe zweiten Grades um den Punkt (-1,0). (2P)

Lösung:

1. Der Gradient $\nabla_f(x,y)$ und die Hessematrix $H_f(x,y)$ sind

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2y-1 \\ 2y-2x+3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Da $\det H_f(x,y) = 8 > 0 \;\forall\; (x,y) \in \mathbb{R}^2$, sind alle Punkte elliptisch.
3. Aus $\nabla_f(x,y) = \mathbf{0}$ folgt durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 6x - 2y - 1 &= 0\,, \\ -2x + 2y + 3 &= 0\,, \end{aligned}$$

dass der Punkt $P = (-\frac{1}{2}, -2)$ der einzige stationäre Punkt ist.
Da $\det H_f(P) = 8 > 0$ und $f_{xx}(P) = 6 > 0$ ist, ist die Hessematrix H_f im Punkt P positiv definit.
Der stationäre Punkt ist daher ein lokales Minimum.

4. Die Taylorreihe um den Punkt $(-1,0)$ lautet

$$\begin{aligned} f(-1+h,k) &= f(-1,0) + f_x(-1,0)\,h + f_y(-1,0)\,k + \\ &\quad \frac{1}{2}\,f_{xx}(-1,0)\,h^2 + f_{xy}(-1,0)\,h\,k + \frac{1}{2}\,f_{yy}(-1,0)\,k^2 \\ &= -1 - 7\,h + 5\,k + 3\,h^2 - 2\,h\,k + k^2\,. \end{aligned}$$

□

Gruppe MI B

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = -x^2 - 2\,y^2 + 4\,x\,y + 3\,x - 2\,y + 1\ .$$

1. Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f. (1P)
2. In welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion f elliptisch, hyperbolisch, bzw. parabolisch? (1P)
3. Bestimmen Sie die stationären Punkte von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. (2P)
4. Entwickeln Sie die Funktion f in eine Taylorreihe zweiten Grades um den Punkt (0,1). (2P)

Lösung:

1. Der Gradient $\nabla_f(x,y)$ und die Hessematrix $H_f(x,y)$ sind
$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x+4y+3 \\ -4y+4x-2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$
2. Da $\det H_f(x,y) = -8 < 0\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, sind alle Punkte hyperbolisch.
3. Aus $\nabla_f(x,y) = \mathbf{0}$ folgt durch Lösen des linearen Gleichungssystems
$$\begin{aligned} -2x+4y+3 &= 0\,, \\ 4x-4y-2 &= 0\,, \end{aligned}$$
dass der Punkt $P = (-\frac{1}{2}, -1)$ der einzige stationäre Punkt ist.
Da $\det H_f(P) = -8 < 0$ ist, ist die Hessematrix H_f im Punkt P indefinit aber regulär. Der stationäre Punkt ist daher ein Sattelpunkt.
4. Die Taylorreihe um den Punkt $(0,1)$ lautet
$$\begin{aligned} f(h,1+k) &= f(0,1) + f_x(0,1)\,h + f_y(0,1)\,k + \frac{1}{2}\,f_{xx}(0,1)\,h^2 + f_{xy}(0,1)\,h\,k + \frac{1}{2}\,f_{yy}(0,1)\,k^2 \\ &= -3 + 7\,h - 6\,k - h^2 + 4\,h\,k - 2\,k^2\,. \end{aligned}$$

$\square$

Gruppe MI C

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = -2\,x^2 - 3\,y^2 + 4\,x\,y - 3\,x + 5\,y - 2\,.$$

1. Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f. (1P)
2. In welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion f elliptisch, hyperbolisch, bzw. parabolisch? (1P)
3. Bestimmen Sie die stationären Punkte von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. (2P)
4. Entwickeln Sie die Funktion f in eine Taylorreihe zweiten Grades um den Punkt (1,0). (2P)

Lösung:

1. Der Gradient $\nabla_f(x,y)$ und die Hessematrix $H_f(x,y)$ sind

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x + 4y - 3 \\ -6y + 4x + 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Da $\det H_f(x,y) = 8 > 0 \;\forall\; (x,y) \in \mathbb{R}^2$, sind alle Punkte elliptisch.

3. Aus $\nabla_f(x,y) = \mathbf{0}$ folgt durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -4x + 4y - 3 &= 0\,, \\ 4x - 6y + 5 &= 0\,, \end{aligned}$$

dass der Punkt $P = (\frac{1}{4}, 1)$ der einzige stationäre Punkt ist.
Da $\det H_f(P) = 8 > 0$ und $f_{xx}(P) = -4 < 0$ ist, ist die Hessematrix H_f im Punkt P negativ definit. Der stationäre Punkt ist daher ein lokales Maximum.

4. Die Taylorreihe um den Punkt $(1,0)$ lautet

$$\begin{aligned} f(1+h,k) &= f(1,0) + f_x(1,0)\,h + f_y(1,0)\,k + \frac{1}{2}\,f_{xx}(1,0)\,h^2 + f_{xy}(1,0)\,h\,k + \frac{1}{2}\,f_{yy}(1,0)\,k^2 \\ &= -7 - 7\,h + 9\,k - 2\,h^2 + 4\,h\,k - 3\,k^2\,. \end{aligned}$$

$\square$

Gruppe DO A

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 2\,x\,e^{2\,y} - y\ .$$

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x,y) = 0$ lokal um den Punkt $(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann. (2P)

2. Berechnen Sie für die implizit definierte Funktion $y(x)$ die erste und zweite Ableitung nach x bei $x = 0$, also $y'(0)$ und $y''(0)$. (3P)

3. Bestimmen Sie für $y(x)$ das Taylorpolynom 2. Grades um $x = 0$. (1P)

Lösung:

1. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x(x,y) = 2\,e^{2y} \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = 4\,x\,e^{2y} - 1\,.$$

Da $f(0,0) = 0$ ist, die partiellen Ableitung f_x, f_y in einer Umgebung von $(0,0)$ existieren und stetig sind, und $f_y(0,0) = -1 \neq 0$ ist, kann laut dem Satz über implizite Funktionen lokal um $(0,0)$ nach y aufgelöst werden.

2. Die zweiten partiellen Ableitungen sind

$$f_{xx}(x,y) = 0, \quad f_{xy}(x,y) = 4\,e^{2y} \quad \text{und} \quad f_{yy}(x,y) = 8\,x\,e^{2y}\,.$$

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle $(0,0)$ sind

$$f_x(0,0) = 2\,,\ f_y(0,0) = -1\,,\ f_{xx}(0,0) = 0\,,\ f_{xy}(0,0) = 4 \ \text{ und } \ f_{yy}(0,0) = 0\,.$$

Zweimaliges implizites Ableiten von $f(x,y) = 0$ nach x führt auf

$$f_x + f_y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}\ ,$$

$$f_{xx} + f_{xy}\,y' + f_{yx}\,y' + f_y\,y'' + f_{yy}\,(y')^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{f_{xx} + 2\,f_{xy}\,y' + f_{yy}\,(y')^2}{f_y}\ .$$

Die Ableitungen der implizit definierten Funktion $y(x)$ an der Stelle $x = 0$ sind damit

$$y'(0) = 2 \quad \text{und} \quad y''(0) = 16\ .$$

3. Mit den Ergebnissen aus Punkt 2 folgt für das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $x = 0$,

$$\begin{aligned} y(h) &= y(0) + y'(0)\,h + \frac{1}{2}\,y''(0)\,h^2 + R_3(h) \\ &= 2\,h + 8\,h^2 + R_3(h) \end{aligned}$$

$\square$

Gruppe DO B

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 4\,x\,e^{-y} + 2\,y\ .$$

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x,y) = 0$ lokal um den Punkt $(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann. (2P)
2. Berechnen Sie für die implizit definierte Funktion $y(x)$ die erste und zweite Ableitung nach x bei $x = 0$, also $y'(0)$ und $y''(0)$. (3P)
3. Bestimmen Sie für $y(x)$ das Taylorpolynom 2. Grades um $x = 0$. (1P)

Lösung:

1. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x(x,y) = 4\,e^{-y} \quad \text{und} \quad f_y(x,y) = -4\,x\,e^{-y} + 2\,.$$

Da $f(0,0) = 0$ ist, die partiellen Ableitung f_x, f_y in einer Umgebung von $(0,0)$ existieren und stetig sind, und $f_y(0,0) = 2 \neq 0$ ist, kann laut dem Satz über implizite Funktionen lokal um $(0,0)$ nach y aufgelöst werden.

2. Die zweiten partiellen Ableitungen sind

$$f_{xx}(x,y) = 0, \quad f_{xy}(x,y) = -4\,e^{-y} \quad \text{und} \quad f_{yy}(x,y) = 4\,x\,e^{-y}\,.$$

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle $(0,0)$ sind

$$f_x(0,0) = 4\,,\ f_y(0,0) = 2\,,\ f_{xx}(0,0) = 0\,,\ f_{xy}(0,0) = -4 \ \text{ und } \ f_{yy}(0,0) = 0\,.$$

Zweimaliges implizites Ableiten von $f(x,y) = 0$ nach x führt auf

$$f_x + f_y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}\ ,$$

$$f_{xx} + f_{xy}\,y' + f_{yx}\,y' + f_y\,y'' + f_{yy}\,(y')^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{f_{xx} + 2\,f_{xy}\,y' + f_{yy}\,(y')^2}{f_y}\ .$$

Die Ableitungen der implizit definierten Funktion $y(x)$ an der Stelle $x = 0$ sind damit

$$y'(0) = -2 \quad \text{und} \quad y''(0) = -8\ .$$

3. Mit den Ergebnissen aus Punkt 2 folgt für das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $x = 0$,

$$\begin{aligned} y(h) &= y(0) + y'(0)\,h + \frac{1}{2}\,y''(0)\,h^2 + R_3(h) \\ &= -2\,h - 4\,h^2 + R_3(h) \end{aligned}$$

□

Gruppe DO C

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = -2\,x\,e^{4\,y} + y\ .$$

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y) = 0$ lokal um den Punkt $(0, 0)$ nach y aufgelöst werden kann. (2P)
2. Berechnen Sie für die implizit definierte Funktion $y(x)$ die erste und zweite Ableitung nach x bei $x = 0$, also $y'(0)$ und $y''(0)$. (3P)
3. Bestimmen Sie für $y(x)$ das Taylorpolynom 2. Grades um $x = 0$. (1P)

Lösung:

1. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x(x, y) = -2\,e^{4y} \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = -8\,x\,e^{4y} + 1\,.$$

Da $f(0, 0) = 0$ ist, die partiellen Ableitung f_x, f_y in einer Umgebung von $(0, 0)$ existieren und stetig sind, und $f_y(0, 0) = 1 \neq 0$ ist, kann laut dem Satz über implizite Funktionen lokal um $(0, 0)$ nach y aufgelöst werden.

2. Die zweiten partiellen Ableitungen sind

$$f_{xx}(x, y) = 0, \quad f_{xy}(x, y) = -8\,e^{4y} \quad \text{und} \quad f_{yy}(x, y) = -32\,x\,e^{4y}\,.$$

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle $(0, 0)$ sind

$$f_x(0, 0) = -2\,,\ f_y(0, 0) = 1\,,\ f_{xx}(0, 0) = 0\,,\ f_{xy}(0, 0) = -8 \ \text{ und } \ f_{yy}(0, 0) = 0\,.$$

Zweimaliges implizites Ableiten von $f(x, y) = 0$ nach x führt auf

$$f_x + f_y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}\ ,$$

$$f_{xx} + f_{xy}\,y' + f_{yx}\,y' + f_y\,y'' + f_{yy}\,(y')^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{f_{xx} + 2\,f_{xy}\,y' + f_{yy}\,(y')^2}{f_y}\ .$$

Die Ableitungen der implizit definierten Funktion $y(x)$ an der Stelle $x = 0$ sind damit

$$y'(0) = 2 \quad \text{und} \quad y''(0) = 32\ .$$

3. Mit den Ergebnissen aus Punkt 2 folgt für das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $x = 0$,

$$\begin{aligned} y(h) &= y(0) + y'(0)\,h + \frac{1}{2}\,y''(0)\,h^2 + R_3(h) \\ &= 2\,h + 16\,h^2 + R_3(h) \end{aligned}$$

$\square$