Gruppe MI A

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^5\, y^4 \ .$$

1. Bestimmen Sie alle möglichen lokalen Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung
$$10\, x + 2\, y = 3$$
mit Hilfe der Methode der Langrange-Multiplikatoren. (4P)
2. Zeigen Sie durch implizite Differentiation der Funktion $h(x) := f(x, y(x))$, dass der Punkt $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ ein lokales Maximum ist. (2P)

Lösung:

1. Mit $f(x,y) = x^5y^4$ und $\varphi(x,y) = 10x + 2y - 3$ führt die Methode der Langrange-Multiplikatoren auf
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) = x^5y^4 + \lambda(10x + 2y - 3)\, .$$
Da $\nabla\varphi(x,y) = (10,2) \neq (0,0)$ ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ das Gleichungssystem
$$\begin{array}{lcll} (1) \quad F_x & = & 5x^4y^4 + 10\lambda = 0 & \Rightarrow\ \lambda = -\dfrac{x^4y^4}{2}\,, \\ (2) \quad F_y & = & 4x^5y^3 + 2\lambda = 0 & \Rightarrow\ \lambda = -2x^5y^3\,, \\ (3) \quad F_\lambda & = & 10x + 2y - 3 = 0\,. & \end{array}$$
Gleichsetzen von λ aus (1) und (2) führt mittels nachfolgenden Umformungen
$$\begin{aligned} -\frac{x^4y^4}{2} &= -2x^5y^3\,, \\ x^4y^4 &= 4x^5y^3\,, \\ x^4y^4 - 4x^5y^3 &= 0\,, \\ x^4y^3(y - 4x) &= 0\,, \end{aligned}$$
auf die drei Lösungsfälle $y = 4x$, $x = 0$ und $y = 0$.
   - Für $y = 4x$ folgt durch Einsetzen in (3) $10x + 8x - 3 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{6}$ und $y = 4x = 4\,\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.
   - Für $x = 0$ folgt durch Einsetzen in (3) $y = \frac{3}{2}$.
   - Für $y = 0$ folgt durch Einsetzen in (3) $x = \frac{3}{10}$.

   Damit sind die Punkte $P_1 = (\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$, $P_2 = (0, \frac{3}{2})$ und $P_3 = (\frac{3}{10}, 0)$ die möglichen Extrema.

   Bemerkung:
   Zum Beispiel lässt das Skizzieren der Niveaulinien von $f(x,y)$ und der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ erkennen, dass f unter der Bedingung $\varphi = 0$ im Punkt P_1 ein lokales Maximum, im Punkt P_2 einen Sattelpunkt und im Punkt P_3 ein lokales Minimum hat.
2. Mit $\varphi_x = 10 + 2y' = 0 \ \Rightarrow\ y' = -5$ und $\varphi_{xx} = 2y'' = 0 \ \Rightarrow y'' = 0$, ergeben sich die Ableitungen der implizit definierte Funktion $h(x) = f(x, y(x))$ im Punkt P_1 zu
$$\begin{aligned} f_x(x, y(x)) &= 5x^4y^4 + 4x^5y^3y' \\ \Rightarrow\ f_x(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}) &= 0 \ \Rightarrow\ \text{möglicher Extremwert}\,, \\ f_{xx}(x, y(x)) &= 20x^3y^4 + 20x^4y^3y' + 20x^4y^3y' + 12x^5y^2y'^2 + 4x^5y^3y'' \\ \Rightarrow\ f_{xx}(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}) &= -\tfrac{5}{486} \approx -0.01 < 0\,. \end{aligned}$$
Der Punkt P_1 ist also ein lokales Maximum. □

Gruppe MI B

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3\, y^5 \ .$$

1. Bestimmen Sie alle möglichen lokalen Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung
$$6\,x + 3\,y = 4$$
mit Hilfe der Methode der Langrange-Multiplikatoren. (4P)

2. Zeigen Sie durch implizite Differentiation der Funktion $h(x) := f(x,y(x))$, dass der Punkt $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{6}\right)$ ein lokales Maximum ist. (2P)

Lösung:

1. Mit $f(x,y) = x^3y^5$ und $\varphi(x,y) = 6x+3y-4$ führt die Methode der Langrange-Multiplikatoren auf
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) = x^3y^5 + \lambda(6x+3y-4)\,.$$
Da $\nabla\varphi(x,y) = (6,3) \neq (0,0)$ ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rlcll} (1) & F_x & = & 3x^2y^5 + 6\lambda = 0 & \Rightarrow\ \lambda = -\dfrac{x^2y^5}{2}\,, \\ (2) & F_y & = & 5x^3y^4 + 3\lambda = 0 & \Rightarrow\ \lambda = -\dfrac{5x^3y^4}{3}\,, \\ (3) & F_\lambda & = & 6x+3y-4 = 0\,. & \end{array}$$
Gleichsetzen von λ aus (1) und (2) führt mittels nachfolgenden Umformungen
$$\begin{aligned} -\frac{x^2y^5}{2} &= -\frac{5x^3y^4}{3}\,, \\ 3x^2y^5 &= 10x^3y^4\,, \\ 3x^2y^5 - 10x^3y^4 &= 0\,, \\ x^2y^4(3y-10x) &= 0\,, \end{aligned}$$
auf die drei Lösungsfälle $3y = 10x$, $x = 0$ und $y = 0$.
   - Für $3y = 10x$ folgt durch Einsetzen in (3), $6x+10x-4 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{4}$ und $y = \frac{10}{3}\,x = \frac{10}{3}\,\frac{1}{4} = \frac{5}{6}$.
   - Für $x = 0$ folgt durch Einsetzen in (3) $y = \frac{4}{3}$.
   - Für $y = 0$ folgt durch Einsetzen in (3) $x = \frac{2}{3}$.

   Damit sind die Punkte $P_1 = (\frac{1}{4}, \frac{5}{6})$, $P_2 = (0, \frac{4}{3})$ und $P_3 = (\frac{2}{3}, 0)$ die möglichen Extrema.

   Bemerkung:
   Zum Beispiel lässt das Skizzieren der Niveaulinien von $f(x,y)$ und der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ erkennen, dass f unter der Bedingung $\varphi = 0$ im Punkt P_1 ein lokales Maximum und in den Punkten P_2 und P_3 Sattelpunkte hat.

2. Mit $\varphi_x = 6 + 3y' = 0 \ \Rightarrow\ y' = -2$ und $\varphi_{xx} = 3y'' = 0 \ \Rightarrow y'' = 0$, ergeben sich die Ableitungen der implizit definierte Funktion $h(x) = f(x,y(x))$ im Punkt P_1 zu
$$\begin{aligned} f_x(x,y(x)) &= 3x^2y^5 + 5x^3y^4y' \\ \Rightarrow\ f_x(\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{6}) &= 0 \ \Rightarrow\ \text{möglicher Extremwert}\,, \\ f_{xx}(x,y(x)) &= 6xy^5 + 15x^2y^4y' + 15x^2y^4y' + 20x^3y^3y'^2 + 5x^3y^4y'' \\ \Rightarrow\ f_{xx}(\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{6}) &\approx -0.48 < 0\,. \end{aligned}$$
Der Punkt P_1 ist also ein lokales Maximum. □

Gruppe MI C

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3\, y^6 \;.$$

1. Bestimmen Sie alle möglichen lokalen Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung
$$4\,x + 5\,y = 6$$
mit Hilfe der Methode der Langrange-Multiplikatoren. (4P)
2. Zeigen Sie durch implizite Differentiation der Funktion $h(x) := f(x, y(x))$, dass der Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$ ein lokales Maximum ist. (2P)

Lösung:

1. Mit $f(x,y) = x^3y^6$ und $\varphi(x,y) = 4x + 5y - 6$ führt die Methode der Langrange-Multiplikatoren auf
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) = x^3y^6 + \lambda(4x + 5y - 6)\,.$$
Da $\nabla\varphi(x,y) = (4,5) \neq (0,0)$ ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ das Gleichungssystem
$$\begin{array}{llcll} (1) & F_x & = & 3x^2y^6 + 4\lambda = 0 & \Rightarrow\ \lambda = -\dfrac{3x^2y^6}{4}\,, \\ (2) & F_y & = & 6x^3y^5 + 5\lambda = 0 & \Rightarrow\ \lambda = -\dfrac{6x^3y^5}{5}\,, \\ (3) & F_\lambda & = & 4x + 5y - 6 = 0\,. & \end{array}$$
Gleichsetzen von λ aus (1) und (2) führt mittels nachfolgenden Umformungen
$$\begin{aligned} -\frac{3x^2y^6}{4} &= -\frac{6x^3y^5}{5}\,, \\ 15x^2y^6 &= 24x^3y^5\,, \\ 5x^2y^6 - 8x^3y^5 &= 0\,, \\ x^2y^5(5y - 8x) &= 0\,, \end{aligned}$$
auf die drei Lösungsfälle $5y = 8x$, $x = 0$ und $y = 0$.
   - Für $5y = 8x$ folgt durch Einsetzen in (3) $4x{+}8x{-}6 = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{8}{5}\,x = \frac{8}{5}\,\frac{1}{2} = \frac{4}{5}$.
   - Für $x = 0$ folgt durch Einsetzen in (3) $y = \frac{6}{5}$.
   - Für $y = 0$ folgt durch Einsetzen in (3) $x = \frac{3}{2}$.

   Damit sind die Punkte $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$, $P_2 = (0, \frac{6}{5})$ und $P_3 = (\frac{3}{2}, 0)$ die möglichen Extrema.

   Bemerkung:
   Zum Beispiel lässt das Skizzieren der Niveaulinien von $f(x,y)$ und der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ erkennen, dass f unter der Bedingung $\varphi = 0$ im Punkt P_1 ein lokales Maximum, im Punkt P_2 einen Sattelpunkt und im Punkt P_3 ein lokales Minimum hat.
2. Mit $\varphi_x = 4 + 5y' = 0 \ \Rightarrow\ y' = -\frac{4}{5}$ und $\varphi_{xx} = 5y'' = 0 \ \Rightarrow y'' = 0$, ergeben sich die Ableitungen der implizit definierte Funktion $h(x) = f(x, y(x))$ im Punkt P_1 zu
$$\begin{aligned} f_x(x, y(x)) &= 3x^2y^6 + 6x^3y^5y' \\ \Rightarrow\ f_x(\tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{5}) &= 0 \ \Rightarrow\ \text{möglicher Extremwert}\,, \\ f_{xx}(x, y(x)) &= 6xy^6 + 18x^2y^5y' + 18x^2y^5y' + 30x^3y^4y'^2 + 6x^3y^5y'' \\ \Rightarrow\ f_{xx}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{5}) &\approx -0.59 < 0\,. \end{aligned}$$
Der Punkt P_1 ist also ein lokales Maximum. □

Gruppe DO A

Gegeben sind der Punkt $P = (1, -1, 2)$ und die Gleichung der Ebene ε im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\varepsilon:\ 4\,x + 2\,y - z = 3\,.$$

1. Bestimmen Sie jenen Punkt $X = (x, y, z)$ der Ebene ε, der zum Punkt P minimalen Abstand hat, indem Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := \|X - P\|_2^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$4\,x + 2\,y - z = 3$$

mit Hilfe der Methode der Langrange-Multiplikatoren minimieren. (5P)

2. Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes P zur Ebene ε. (1P)

Lösung:

1. Mit $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2$ und $\varphi(x, y, z) = 4x + 2y - z - 3$ führt die Methode der Langrange-Multiplikatoren auf

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, \varphi(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 + \lambda(4x + 2y - z - 3)\,.$$

Da $\nabla\varphi(x, y, z) = (4, 2, -1) \neq (0, 0, 0)$ ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcll}
(1) & F_x & = & 2(x-1) + 4\lambda = 0 & \Rightarrow\ x = 1 - 2\lambda\,, \\
(2) & F_y & = & 2(y+1) + 2\lambda = 0 & \Rightarrow\ y = -1 - \lambda\,, \\
(3) & F_z & = & 2(z-2) - \lambda = 0 & \Rightarrow\ z = \dfrac{4+\lambda}{2}\,, \\
(4) & F_\lambda & = & 4x + 2y - z - 3 = 0\,. &
\end{array}$$

Einsetzen von x, y und z in (4) liefert

$$4(1-2\lambda) + 2(-1-\lambda) - \frac{4+\lambda}{2} - 3 = \frac{8 - 16\lambda - 4 - 4\lambda - 4 - \lambda - 6}{2} = \frac{-21\lambda - 6}{2} = 0\,.$$

Daraus folgt $\lambda = -\dfrac{2}{7}$ und

$$x = 1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}\,,\quad y = -1 + \frac{2}{7} = -\frac{5}{7}\,,\quad z = \frac{1}{2}\Big(4 - \frac{2}{7}\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{26}{7} = \frac{13}{7}\,.$$

Die Funktion f hat unter der Bedingung $\varphi = 0$ damit das Minimum im Punkt $Q = \Big(\dfrac{11}{7}, -\dfrac{5}{7}, \dfrac{13}{7}\Big)$.

2. Der Normalabstand des Punktes P zur Ebene ε ist

$$\|Q - P\|_2 = \sqrt{\Big(\frac{11}{7} - 1\Big)^2 + \Big(-\frac{5}{7} + 1\Big)^2 + \Big(\frac{13}{7} - 2\Big)^2} = \sqrt{\frac{3}{7}} \approx 0.655\,.$$

Bemerkung:
Mittels Hessescher Normalform lässt sich der Abstand des Punktes P zur Ebene ε mit dem Normalvektor $\mathbf{n}$ der Ebene ε auch ohne den Punkt Q bestimmen:

$$\text{Mit } \varepsilon:\ \frac{\mathbf{n}X - d}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{4x+2y-z-3}{\sqrt{4^2+2^2+1^2}} = 0 \ \Rightarrow\ \ \|Q - P\| = \frac{\|\mathbf{n}P - d\|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|4-2-2-3|}{\sqrt{4^2+2^2+1^2}} \approx 0.655\,.$$

$\square$

Gruppe DO B

Gegeben sind der Punkt $P = (2, 1, -1)$ und die Gleichung der Ebene ε im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\varepsilon : \; x - 2\,y + 4\,z = 5\,.$$

1. Bestimmen Sie jenen Punkt $X = (x, y, z)$ der Ebene ε, der zum Punkt P minimalen Abstand hat, indem Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := \|X - P\|_2^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$x - 2\,y + 4\,z = 5$$

mit Hilfe der Methode der Langrange-Multiplikatoren minimieren. (5P)

2. Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes P zur Ebene ε. (1P)

Lösung:

1. Mit $f(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$ und $\varphi(x, y, z) = x - 2y + 4z - 5$ führt die Methode der Langrange-Multiplikatoren auf

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\,\varphi(x, y, z) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 + \lambda(x - 2y + 4z - 5)\,.$$

Da $\nabla\varphi(x, y, z) = (1, -2, 4) \neq (0, 0, 0)$ ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcll}
(1) & F_x & = & 2(x-2) + \lambda = 0 & \Rightarrow\; x = \dfrac{4-\lambda}{2}\,, \\
(2) & F_y & = & 2(y-1) - 2\lambda = 0 & \Rightarrow\; y = 1 + \lambda\,, \\
(3) & F_z & = & 2(z+1) + 4\lambda = 0 & \Rightarrow\; z = -1 - 2\lambda\,, \\
(4) & F_\lambda & = & x - 2y + 4z - 5 = 0\,. &
\end{array}$$

Einsetzen von x, y und z in (4) liefert

$$\frac{4-\lambda}{2} - 2(1+\lambda) + 4(-1-2\lambda) - 5 = \frac{4 - \lambda - 4 - 4\lambda - 8 - 16\lambda - 10}{2} = \frac{-18 - 21\lambda}{2} = 0\,.$$

Daraus folgt $\lambda = -\dfrac{6}{7}$ und

$$x = \frac{1}{2}\Big(4 + \frac{6}{7}\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{34}{7} = \frac{17}{7}\,, \quad y = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}\,, \quad z = -1 + \frac{12}{7} = \frac{5}{7}\,.$$

Die Funktion f hat unter der Bedingung $\varphi = 0$ damit das Minimum im Punkt $Q = \Big(\dfrac{17}{7}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{5}{7}\Big)$.

2. Der Normalabstand des Punktes P zur Ebene ε ist

$$\|Q - P\|_2 = \sqrt{\Big(\frac{17}{7} - 2\Big)^2 + \Big(\frac{1}{7} - 1\Big)^2 + \Big(\frac{5}{7} + 1\Big)^2} = \sqrt{\frac{27}{7}} \approx 1.964\,.$$

Bemerkung:
Mittels Hessescher Normalform lässt sich der Abstand des Punktes P zur Ebene ε mit dem Normalvektor $\mathbf{n}$ der Ebene ε auch ohne den Punkt Q bestimmen:

$$\text{Mit } \varepsilon : \frac{\mathbf{n}X - d}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{x - 2y + 4z - 5}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \|Q - P\| = \frac{\|\mathbf{n}P - d\|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|2 - 2 - 4 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}} \approx 1.964\,.$$

$\square$

Gruppe DO C

Gegeben sind der Punkt $P = (1, -2, 1)$ und die Gleichung der Ebene ε im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\varepsilon: \; 2\,x - 4\,y + z = -3\,.$$

1. Bestimmen Sie jenen Punkt $X = (x, y, z)$ der Ebene ε, der zum Punkt P minimalen Abstand hat, indem Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

   $$f(x, y, z) := \|X - P\|_2^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$$

   unter der Nebenbedingung

   $$2\,x - 4\,y + z = -3$$

   mit Hilfe der Methode der Langrange-Multiplikatoren minimieren. (5P)

2. Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes P zur Ebene ε. (1P)

Lösung:

1. Mit $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$ und $\varphi(x, y, z) = 2x - 4y + z + 3$ führt die Methode der Langrange-Multiplikatoren auf

   $$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\,\varphi(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 + \lambda(2x - 4y + z + 3)\,.$$

   Da $\nabla\varphi(x, y, z) = (2, -4, 1) \neq (0, 0, 0)$ ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ das lineare Gleichungssystem

   $$\begin{array}{lll} (1) \;\; F_x & = & 2(x-1) + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \; x = 1 - \lambda\,, \\ (2) \;\; F_y & = & 2(y+2) - 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \; y = -2 + 2\lambda\,, \\ (3) \;\; F_z & = & 2(z-1) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \; z = \dfrac{2-\lambda}{2}\,, \\ (4) \;\; F_\lambda & = & 2x - 4y + z + 3 = 0\,. \end{array}$$

   Einsetzen von x, y und z in (4) liefert

   $$2(1-\lambda) - 4(-2+2\lambda) + \frac{2-\lambda}{2} + 3 = \frac{4 - 4\lambda + 16 - 16\lambda + 2 - \lambda + 6}{2} = \frac{28 - 21\lambda}{2} = 0\,.$$

   Daraus folgt $\lambda = \dfrac{4}{3}$ und

   $$x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\,, \quad y = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}\,, \quad z = \frac{1}{2}\Big(2 - \frac{4}{3}\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

   Die Funktion f hat unter der Bedingung $\varphi = 0$ damit das Minimum im Punkt $Q = \Big(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\Big)$.

2. Der Normalabstand des Punktes P zur Ebene ε ist

   $$\|Q - P\|_2 = \sqrt{\Big(-\frac{1}{3} - 1\Big)^2 + \Big(\frac{2}{3} + 2\Big)^2 + \Big(\frac{1}{3} - 1\Big)^2} = \sqrt{\frac{28}{3}} \approx 3.055\,.$$

   Bemerkung:
   Mittels Hessescher Normalform lässt sich der Abstand des Punktes P zur Ebene ε mit dem Normalvektor $\mathbf{n}$ der Ebene ε auch ohne den Punkt Q bestimmen:

   $$\text{Mit } \varepsilon: \frac{\mathbf{n}X - d}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{2x - 4y + z + 3}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} = 0 \;\Rightarrow\; \|Q - P\| = \frac{\|\mathbf{n}P - d\|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|2 + 8 + 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} \approx 3.055\,.$$

□