Gruppe MI A

1. Finden Sie das Konvergenzgebiet der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n\,(z-1)^{n+2}}{n^2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

(3P)

2. Berechnen Sie den Ausdruck

$$\log\,(-3-3\,i)\,.$$

(3P)

Lösung:

1. Zum Beispiel mit Hilfe des Quotientenkriteriums erhält man den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\,3^n}{n^2\,3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

Daher konvergiert die Reihe zumindest für $|z-1| < \frac{1}{3}$.
Für $|z-1| = \frac{1}{3}$ ist

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\,(z-1)^{n+2}}{n^2}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\,|z-1|^{n+2}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\,\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{n^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

Damit konvergiert die Reihe auch am Rand.
Die Reihe ist also konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, für die $|z-1| \le \frac{1}{3}$ ist. □

2. Umrechnen von $z = x + i\,y = -3 - 3\,i$ (befindet sich in der Gauß'schen Zahlenebene im 3. Quadranten) in Polarkoordinaten $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}$ mittels

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{18} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = \mathrm{Arctan}(1) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\,\pi}{4}\,,$$

führt auf $z = \sqrt{18}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{5\,\pi}{4}}$.
Also ist

$$\log(-3-3\,i) = \ln\sqrt{18} + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2\,k\,\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

□

Gruppe MI B

1. Finden Sie das Konvergenzgebiet der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z+3)^{n-2}\, 4^n}{n^3}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

(3P)

2. Berechnen Sie den Ausdruck

$$\log\,(-4+4\,i)\,.$$

(3P)

Lösung:

1. Zum Beispiel mit Hilfe des Quotientenkriteriums erhält man den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3\, 4^n}{n^3\, 4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,.$$

Daher konvergiert die Reihe zumindest für $|z+3| < \frac{1}{4}$.
Für $|z+3| = \frac{1}{4}$ ist

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(z+3)^{n-2}\, 4^n}{n^3}\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z+3|^{n-2}\, 4^n}{n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\, 4^n}{n^3} = 16 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty\,.$$

Damit konvergiert die Reihe auch am Rand.
Die Reihe ist also konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, für die $|z+3| \le \frac{1}{4}$ ist. □

2. Umrechnen von $z = x + i\,y = -4 + 4\,i$ (befindet sich in der Gauß'schen Zahlenebene im 2. Quadranten) in Polarkoordinaten $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}$ mittels

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{32} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = -1 \;\Rightarrow\; \varphi = \operatorname{Arctan}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\,\pi}{4}\,,$$

führt auf $z = \sqrt{32}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{3\,\pi}{4}}$.
Also ist

$$\log(-4+4\,i) = \ln\sqrt{32} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\,k\,\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

□

Gruppe MI C

1. Finden Sie das Konvergenzgebiet der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^4\, 2^{n+1}}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

(3P)

2. Berechnen Sie den Ausdruck

$$\log\,(-2+2\,i)\,.$$

(3P)

Lösung:

1. Zum Beispiel mit Hilfe des Quotientenkriteriums erhält man den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4\, 2^{n+2}}{n^4\, 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 2 = 2\,.$$

Daher konvergiert die Reihe zumindest für $|z+i| < 2$.
Für $|z+i| = 2$ ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^4\, 2^{n+1}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z+i|^n}{n^4\, 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4\, 2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty\,.$$

Damit konvergiert die Reihe auch am Rand.
Die Reihe ist also konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, für die $|z+i| \le 2$ ist. □

2. Umrechnen von $z = x + i\,y = -2 + 2\,i$ (befindet sich in der Gauß'schen Zahlenebene im 2. Quadranten) in Polarkoordinaten $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}$ mittels

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = -1 \;\Rightarrow\; \varphi = \mathrm{Arctan}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\,\pi}{4}\,,$$

führt auf $z = \sqrt{8}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{3\,\pi}{4}}$.
Also ist

$$\log(-2+2\,i) = \ln\sqrt{8} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\,k\,\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

□

Gruppe DO A

1. Überprüfen Sie die komplexe Differenzierbarkeit der Funktion
$$f(z) = \frac{1}{4}\,x^4\,i - x^3\,y + \frac{3}{2}\,x^2\,y^2\,i^3 + x\,y^3 + \frac{1}{4}\,y^4\,i + 3\,, \quad z = x + i\,y,\ z \in \mathbb{C}\,,$$
mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. (3P)

2. Berechnen Sie den Ausdruck
$$\sqrt[4]{-3 + 3\,i}$$
(3P)

Lösung:

1. Ordnen der Real- und Imaginärteile von f führt auf
$$f(z) = -x^3\,y + x\,y^3 + 3 + i\,(\frac{1}{4}\,x^4 - \frac{3}{2}\,x^2\,y^2 + \frac{1}{4}\,y^4) = u + i\,v\,.$$
Die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y existieren, und sind überall stetig. Sie lauten
$$u_x = -3\,x^2\,y + y^3, \quad v_y = -3\,x^2\,y + y^3, \quad u_y = -x^3 + 3\,x\,y^2, \quad v_x = x^3 - 3\,x\,y^2\,.$$
Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ sind erfüllt. Daher ist f in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. $\square$

2. Umrechnen von $z = x + i\,y = -3 + 3\,i$ (befindet sich in der Gauß'schen Zahlenebene im 2. Quadranten) in Polarkoordinaten $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}$ mittels
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{18} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = -1 \;\Rightarrow\; \varphi = \mathrm{Arctan}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\,\pi}{4}\,,$$
führt auf $z = \sqrt{18}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{3\,\pi}{4}}$.
Also ist
$$\sqrt[4]{-3 + 3\,i} = \sqrt[4]{\sqrt{18}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\,k\,\pi}{4}} = \sqrt[8]{18}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{3\pi + 8\,k\,\pi}{16}}\,, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}\,.$$
$\square$

Gruppe DO B

1. Überprüfen Sie die komplexe Differenzierbarkeit der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2}\,y^4 + 2\,x\,y^3\,i^7 - 3\,x^2\,y^2 + 2\,x^3\,y\,i + \frac{1}{2}\,x^4 - 5\,, \quad z = x + i\,y,\ z \in \mathbb{C}\,,$$

mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. (3P)

2. Berechnen Sie den Ausdruck

$$\sqrt[3]{-4-4\,i}$$

(3P)

Lösung:

1. Ordnen der Real- und Imaginärteile von f führt auf

$$f(z) = \frac{1}{2}y^4 - 3\,x^2\,y^2 + \frac{1}{2}x^4 - 5 + i\,(-2\,x\,y^3 + 2\,x^3\,y) = u + i\,v\,.$$

Die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y existieren, und sind überall stetig. Sie lauten

$$u_x = -6\,x\,y^2 + 2\,x^3, \quad v_y = -6\,x\,y^2 + 2\,x^3, \quad u_y = 2\,y^3 - 6\,x^2\,y, \quad v_x = -2\,y^3 + 6\,x^2\,y\,.$$

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ sind erfüllt. Daher ist f in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. $\square$

2. Umrechnen von $z = x + i\,y = -4 - 4\,i$ (befindet sich in der Gauß'schen Zahlenebene im 3. Quadranten) in Polarkoordinaten $z = r\,\mathrm{e}^{i\,\varphi}$ mittels

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{32} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = 1 \ \Rightarrow\ \varphi = \text{Arctan}(1) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\,\pi}{4}\,,$$

führt auf $z = \sqrt{32}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{5\,\pi}{4}}$.
Also ist

$$\sqrt[3]{-4-4\,i} = \sqrt[3]{\sqrt{32}}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\frac{5\pi}{4}+2\,k\,\pi}{3}} = \sqrt[6]{32}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{5\pi+8\,k\,\pi}{12}}\,, \quad k \in \{0,1,2\}\,.$$

$\square$

Gruppe DO C

1. Überprüfen Sie die komplexe Differenzierbarkeit der Funktion

$$f(z) = x^3 - x^2\, i^6 + 3\, x^2\, y\, i - 3\, x\, y^2 + 2\, x\, y\, i - y^2 - y^3\, i + 4\, i\,, \quad z = x + i\, y,\ z \in \mathbb{C}\,,$$

   mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. (3P)

2. Berechnen Sie den Ausdruck

$$\sqrt[5]{-2 - 2\, i}$$

   (3P)

Lösung:

1. Ordnen der Real- und Imaginärteile von f führt auf

$$f(z) = x^3 + x^2 - 3\, x\, y^2 - y^2 + i\, (3\, x^2\, y + 2\, x\, y - y^3 + 4) = u + i\, v\,.$$

   Die partiellen Ableitungen von u und v nach x und y existieren, und sind überall stetig. Sie lauten

$$u_x = 3\, x^2 + 2\, x - 3\, y^2, \quad v_y = 3\, x^2 + 2\, x - 3\, y^2, \quad u_y = -6\, x\, y - 2\, y, \quad v_x = 6\, x\, y + 2\, y\,.$$

   Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ sind erfüllt. Daher ist f in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. □

2. Umrechnen von $z = x + i\, y = -2 - 2\, i$ (befindet sich in der Gauß'schen Zahlenebene im 3. Quadranten) in Polarkoordinaten $z = r\, \mathrm{e}^{i\, \varphi}$ mittels

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8} \quad \text{und} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} = 1 \ \Rightarrow\ \varphi = \mathrm{Arctan}(1) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\, \pi}{4}\,,$$

   führt auf $z = \sqrt{8}\, \mathrm{e}^{i\, \frac{5\, \pi}{4}}$.
   Also ist

$$\sqrt[5]{-2 - 2\, i} = \sqrt[5]{\sqrt{8}}\, \mathrm{e}^{i\, \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\, k\, \pi}{5}} = \sqrt[10]{8}\, \mathrm{e}^{i\, \frac{5\pi + 8\, k\, \pi}{20}}\,, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\,.$$

   □