Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2010

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

1. Test (DO, 25.3.2010, UE-Gr. 1) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) \;=\; \cosh(ax+by), \quad 0 \neq a,\, 0 \neq b \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. *[2 P.]*

b) Geben Sie alle stationären Punkte von f an. Welche Gestalt hat die Linearisierung von f (im Sinne der Fréchet-Ableitung) an einem stationären Punkt (x_0, y_0)? *[2 P.]*

c) Geben Sie diejenigen Teilbereiche des $\mathbb{R}^2$ an, die elliptischen, hyperbolischen bzw. parabolischen Punkten von f entsprechen. *[2 P.]*

d) Für festes (x_0, y_0) betrachte man die Gerade $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$g(h) \;:=\; (x_0, y_0) + h\, \nabla f(x_0, y_0)$$

und die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(h) := f(g(h))$. Wie lautet der Wert von $\varphi'(0)$? *[2 Extra-P.]*

LÖSUNG

a) Der Gradient und die Hessematrix von $f(x,y)$ sind

$$\nabla f(x,y) = \sinh(ax+by) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x,y) = \cosh(ax+by) \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}.$$

b) Mit $\nabla f(x,y) = 0$ erhält man die stationären Punkte aus $\sinh(ax+by) = 0 \;\Leftrightarrow\; ax+by = 0$.
Die Menge der stationären Punkte bildet eine Gerade durch den Ursprung.
Die Linearisierung in einem stationären Punkt (x_0, y_0) mit $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ ist

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = f(x_0,y_0) = \cosh(ax_0 + ay_0) = \cosh(0) = 1\,.$$

Die Linearisierung von f, also die Tangentialebene, entspricht einer Ebene parallel zur x-y Ebene.

c) Aus

$$\det H_f(x,y) = \cosh^2(ax+by)\,(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

folgt, dass alle Punkte des $\mathbb{R}^2$ parabolische Punkte von f sind.

d) Wegen $g'(h) = g'(0) = \nabla f(x_0,y_0)$ und $g(0) = (x_0,y_0)$ erhält man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= D((f \circ g)(h)) = Df(g(h)) \cdot Dg(h) = \nabla f(g(h)) \cdot g'(h) \quad \text{und} \\ \varphi'(0) &= \nabla f(g(0)) \cdot g'(0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \nabla f(x_0,y_0) = \sinh^2(ax_0 + by_0)\,(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2010

A N A L Y S I S II F Ü R T P H, UE (103.091)

1. Test (DO, 25.3.2010, UE-Gr. 1) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

Gegeben ist die Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) \;=\; \sin(ax+by), \quad 0 \neq a,\, 0 \neq b \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. *[2 P.]*

b) Geben Sie alle stationären Punkte von f an. Welche Gestalt hat die Linearisierung von f (im Sinne der Fréchet-Ableitung) an einem stationären Punkt (x_0, y_0) ? *[2 P.]*

c) Geben Sie diejenigen Teilbereiche des $\mathbb{R}^2$ an, die elliptischen, hyperbolischen bzw. parabolischen Punkten von f entsprechen. *[2 P.]*

d) Für festes (x_0, y_0) betrachte man die Gerade $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$g(h) \;:=\; (x_0, y_0) + h\,\nabla f(x_0, y_0)$$

und die Funktion $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(h) := f(g(h))$. Wie lautet der Wert von $\varphi'(0)$? *[2 Extra-P.]*

LÖSUNG

a) Der Gradient und die Hessematrix von $f(x,y)$ sind

$$\nabla f(x,y) = \cos(ax+by) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x,y) = -\sin(ax+by) \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}.$$

b) Mit $\nabla f(x,y) = 0$ erhält man die stationären Punkte aus

$$\cos(ax+by) = 0 \;\Leftrightarrow\; ax+by = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \pi \in \mathbb{Z}\,.$$

Die Menge der stationären Punkte bildet eine Schar von parallelen Geraden.
Die Linearisierung in einem stationären Punkt (x_0, y_0) mit $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ ist

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = f(x_0,y_0) = \sin(ax_0 + ay_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k\,.$$

Die Linearisierung von f, also die Tangentialebene, entspricht einer Ebene parallel zur x-y Ebene.

c) Aus

$$\det H_f(x,y) = \sin^2(ax+by)\,(a^2b^2 - a^2b^2) = 0$$

folgt, dass alle Punkte des $\mathbb{R}^2$ parabolische Punkte von f sind.

d) Wegen $g'(h) = g'(0) = \nabla f(x_0, y_0)$ und $g(0) = (x_0, y_0)$ erhält man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= D((f \circ g)(h)) = Df(g(h)) \cdot Dg(h) = \nabla f(g(h)) \cdot g'(h) \quad \text{und} \\ \varphi'(0) &= \nabla f(g(0)) \cdot g'(0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \nabla f(x_0,y_0) = \cos^2(ax_0 + by_0)\,(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2010

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

1. Test (FR, 26.3.2010, UE-Gr. 2) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) \;=\; (x+y+z)^2 + \mathrm{e}^{x} - x$$

a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y,z)$, und geben Sie die Menge der stationären Punkte von f an. Welche Art von Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ liegt vor? *[2 P.]*

b) Geben Sie diejenigen Teilbereiche des $\mathbb{R}^3$ an, die elliptischen, hyperbolischen bzw. parabolischen Punkten von f entsprechen. *[2 P.]*

c) Geben Sie die Taylorentwicklung (inkl. Glied 2. Ordnung) von f an der Stelle $(0,0,0)$ an. *[2 P.]*

d) Denken Sie über folgende Fragestellung nach:

Man gebe die Gleichung der <u>Tangentialebene</u> an den Graphen von f an einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ an.

Wie würden Sie diese Frage umformulieren, und warum? Geben Sie auch die Antwort auf die (korrekt umformulierte) Frage. *[2 Extra-P.]*

LÖSUNG

a) Der Gradient und die Hessematrix von $f(x,y,z)$ sind

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x+y+z)+e^x-1 \\ 2(x+y+z) \\ 2(x+y+z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2+e^x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit $\nabla f(x,y,z) = 0$ erhält man die stationären Punkte aus

$$x+y+z=0 \;\Rightarrow\; e^x-1=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow y+z=0\,,$$

was einer Geraden in der y-z Ebene entspricht.

b) Aus

$$\det H_f(x,y,z) = 4(2+e^x)+8+8-8-4(2+e^x)-8 = 0$$

folgt, dass alle Punkte des $\mathbb{R}^3$ parabolische Punkte von f sind.

c) Die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(0,0,0)$ bis Glieder 2. Ordnung ist

$$f(x,y,z) \approx 1 + \frac{3}{2}x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

d) Bei Funktionen mit mehr als 2 Veränderlichen spricht man von Tangentialhyperebene oder Tangentialraum, weil die Punktmenge (hier im $\mathbb{R}^4$) keine Ebene im herkömmlichen Sinn ist.
Im Punkt $(x,y,z,t) = (x_0,y_0,z_0,f(x_0,y_0,z_0))$ ist die Gleichung der Tangentialhyperebene

$$\begin{aligned} t(x,y,z) &= f(x_0,y_0,z_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)^T \\ &= (x_0+y_0+z_0)^2 + e^{x_0} - x_0 + [2(x_0+y_0+z_0)+e^{x_0}-1]\,(x-x_0) \\ &\quad +2(x_0+y_0+z_0)(y-y_0) + 2(x_0+y_0+z_0)(z-z_0)\,. \end{aligned}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing TU Wien
W. Auzinger, E. Weinmüller SS 2010

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

1. Test (FR, 26.3.2010, UE-Gr. 2) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) \;=\; (x+2\,y+z)^2 - \frac{x^3}{3}$$

a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y,z)$, und geben Sie die Menge der stationären Punkte von f an. Welche Art von Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ liegt vor? *[2 P.]*

b) Geben Sie diejenigen Teilbereiche des $\mathbb{R}^3$ an, die elliptischen, hyperbolischen bzw. parabolischen Punkten von f entsprechen. *[2 P.]*

c) Geben Sie die Taylorentwicklung (inkl. Glied 2. Ordnung) von f an der Stelle $(0,0,0)$ an. *[2 P.]*

d) Denken Sie über folgende Fragestellung nach:

Man gebe die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f an einem beliebigen Punkt $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ an.

Wie würden Sie diese Frage umformulieren, und warum? Geben Sie auch die Antwort auf die (korrekt umformulierte) Frage. *[2 Extra-P.]*

LÖSUNG

a) Der Gradient und die Hessematrix von $f(x,y,z)$ sind

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x+2y+z)-x^2 \\ 4(x+2y+z) \\ 2(x+2y+z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-2x & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit $\nabla f(x,y,z) = 0$ erhält man die stationären Punkte aus

$$x+2y+z=0 \;\Rightarrow\; x^2=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\Rightarrow 2y+z=0\,,$$

was einer Geraden in der y-z Ebene entspricht.

b) Aus

$$\det H_f(x,y,z) = 16(2-x)+32+32-32-16(2-x)-32 = 0$$

folgt, dass alle Punkte des $\mathbb{R}^3$ parabolische Punkte von f sind.

c) Die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(0,0,0)$ bis Glieder 2. Ordnung ist

$$f(x,y,z) \approx x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2xz$$

d) Bei Funktionen mit mehr als 2 Veränderlichen spricht man von Tangentialhyperebene oder Tangentialraum, weil die Punktmenge (hier im $\mathbb{R}^4$) keine Ebene im herkömmlichen Sinn ist.
Im Punkt $(x,y,z,t) = (x_0,y_0,z_0,f(x_0,y_0,z_0))$ ist die Gleichung der Tangentialhyperebene

$$\begin{aligned} t(x,y,z) &= f(x_0,y_0,z_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)^T \\ &= (x_0+2y_0+z_0)^2 - \frac{x_0^3}{3} + \left[2(x_0+2y_0+z_0)-x_0^2\right](x-x_0) \\ &\quad +4(x_0+2y_0+z_0)(y-y_0) + 2(x_0+2y_0+z_0)(z-z_0)\,. \end{aligned}$$