Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2010

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

2. Test (DO, 6.5.2010, UE-Gr. 1) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

Zu der durch die Gleichung $x - 4y + z = 18$ definierten Ebene im $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Kugel (Mittelpunkt im Ursprung) mit minimalem Radius, so dass ein Kugelpunkt auf der Ebene zu liegen kommt. [1]

a) Formulieren Sie dieses Problem als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung. *[2 P.]*

b) Bestimmen Sie den Radius der gesuchten Kugel mittels Lösung des zugehörigen Lagrange-Systems. *[4 P.]*

Hinweis: Der Lagrange-Parameter lässt sich leicht eliminieren, dann löst man das verbleibende System.

LÖSUNG

a) Eine Kugel mit Mittelpunkt M wird durch die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{R}^3$ beschrieben, deren Abstand zum Mittelpunkt M der Radius r ist. Es gilt also $r^2 = \|X - M\|_2^2$. Mit dem Mittelpunkt im Ursprung ist die Kugel durch die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ gegeben.

Zu Minimieren ist der Radius der Kugel, was gleichbedeutend ist mit der Aufgabe, das Quadrat des Radius zu minimieren. Die "Zielfunktion" lautet damit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Der gesuchte Punkt der Kugel muss zudem auf der Ebene liegen, womit die Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = x - 4y + z - 18 = 0$ erfüllt sein muss.

Die Methode von Langrange führt nun auf

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\, (x - 4y + z - 18)\,.$$

Da $\nabla\varphi(x, y, z) = (1, -4, 1) \neq (0, 0, 0)$ für alle Punkte auf der Ebene ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ das Gleichungssystem $\nabla F(x, y, z, \lambda) = 0$,

$$\begin{array}{llcll}
(1) & F_x & = & 2x + \lambda & = \ 0 \\
(2) & F_y & = & 2y - 4\lambda & = \ 0 \\
(3) & F_z & = & 2z + \lambda & = \ 0 \\
(4) & F_\lambda & = & x - 4y + z - 18 & = \ 0\,.
\end{array}$$

b) Zum Beispiel umformen der Gleichungen (1) bis (3) nach x, y und z und einsetzen in (4) führt auf $\lambda = -2$ und nach rückeinsetzen in x, y und z auf den Punkt $(1, -4, 1)$.

Der Radius der Kugel ist $r = \sqrt{18}$.

[1] Es ist anschaulich klar, dass es eine eindeutige Lösung gibt, wobei die bewusste Kugel die Ebene berührt.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2010

A N A L Y S I S   II   F Ü R   T P H,   UE (103.091)

2. Test (DO, 6.5.2010, UE-Gr. 1) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

Zu der durch die Gleichung $x - y + 3z = 11$ definierten Ebene im $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Kugel (Mittelpunkt im Ursprung) mit minimalem Radius, so dass ein Kugelpunkt auf der Ebene zu liegen kommt. [1]

a) Formulieren Sie dieses Problem als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung. *[2 P.]*

b) Bestimmen Sie den Radius der gesuchten Kugel mittels Lösung des zugehörigen Lagrange-Systems. *[4 P.]*

Hinweis: Der Lagrange-Parameter lässt sich leicht eliminieren, dann löst man das verbleibende System.

LÖSUNG

a) Eine Kugel mit Mittelpunkt M wird durch die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{R}^3$ beschrieben, deren Abstand zum Mittelpunkt M der Radius r ist. Es gilt also $r^2 = \|X - M\|_2^2$. Mit dem Mittelpunkt im Ursprung ist die Kugel durch die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ gegeben.

Zu Minimieren ist der Radius der Kugel, was gleichbedeutend ist mit der Aufgabe, das Quadrat des Radius zu minimieren. Die "Zielfunktion" lautet damit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Der gesuchte Punkt der Kugel muss zudem auf der Ebene liegen, womit die Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = x - y + 3z - 11 = 0$ erfüllt sein muss.

Die Methode von Langrange führt nun auf

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\,\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\,(x - y + 3z - 11)\,.$$

Da $\nabla\varphi(x, y, z) = (1, -1, 3) \neq (0, 0, 0)$ für alle Punkte auf der Ebene ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ das Gleichungssystem $\nabla F(x, y, z, \lambda) = 0$,

$$\begin{array}{lllll}
(1) & F_x & = & 2x + \lambda & = \; 0 \\
(2) & F_y & = & 2y - \lambda & = \; 0 \\
(3) & F_z & = & 2z + 3\lambda & = \; 0 \\
(4) & F_\lambda & = & x - y + 3z - 11 & = \; 0\,.
\end{array}$$

b) Zum Beispiel umformen der Gleichungen (1) bis (3) nach x, y und z und einsetzen in (4) führt auf $\lambda = -2$ und nach rückeinsetzen in x, y und z auf den Punkt $(1, -1, 3)$.

Der Radius der Kugel ist $r = \sqrt{11}$.

---

[1] Es ist anschaulich klar, dass es eine eindeutige Lösung gibt, wobei die bewusste Kugel die Ebene berührt.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

A N A L Y S I S   I I   F Ü R   T P H,   UE (103.091)

2. Test (FR, 7.5.2010, UE-Gr. 2) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

Gesucht sind die Extrema des linearen Skalarfeldes $f(x,y,z) = x+2y-z$ unter den Nebenbedingungen

$$x^2+y^2=8, \quad x+z=4,$$

die eine Ellipse als Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem zur Lösung dieser Aufgabe an (Methode von Lagrange). *[2 P.]*

b) Geben Sie alle Lösungen an. *[4 P.]*

Hinweis: Ein Lagrange-Parameter ergibt sich unmittelbar; kann der andere =0 sein?

LÖSUNG

a) Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x+2y-z$ unter den Nebenbedingungen $\varphi_1(x,y,z) = x^2+y^2-8 = 0$ und $\varphi_2(x,y,z) = x+z-4 = 0$.

Die Methode von Langrange führt auf

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) + \lambda\,\varphi_1(x,y,z) + \mu\,\varphi_2(x,y,z) \\ &= x+2y-z+\lambda\,(x^2+y^2-8)+\mu\,(x+z-4)\,. \end{aligned}$$

Da $\nabla\varphi_1(x,y,z) = (2x,2y,0) \neq (0,0,0)$ und $\nabla\varphi_2(x,y,z) = (1,0,1) \neq (0,0,0)$ für alle Punkte auf der Ellipse ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x,y,z)$ unter den Nebenbedingungen $\varphi_1(x,y,z) = 0$ und $\varphi_2(x,y,z) = 0$ das Gleichungssystem $\nabla F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$,

$$\begin{array}{llcl} (1) & F_x & = & 1+2\lambda x+\mu \;=\; 0 \\ (2) & F_y & = & 2+2\lambda y \;=\; 0 \\ (3) & F_z & = & -1+\mu \;=\; 0 \\ (4) & F_\lambda & = & x^2+y^2-8 \;=\; 0 \\ (5) & F_\mu & = & x+z-4 \;=\; 0\,. \end{array}$$

b) Aus (3) erhält man unmittelbar $\mu = 1$. Einsetzen von μ in (1) und zum Beispiel subtrahieren der Gleichungen (1) und (2) führt auf $2\lambda(x-y) = 0 \;\Rightarrow\; x = y$. $\lambda = 0$ widerspricht den Gleichungen (1) und (2). Aus Gleichung (4) folgt nun $x = y = \pm 2$ und aus (5) $z_1 = 2$ bzw $z_2 = 6$.

Die Extrema sind also $(2,2,2)$ und $(-2,-2,6)$.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

2. Test (FR, 7.5.2010, UE-Gr. 2) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

Gesucht sind die Extrema des linearen Skalarfeldes $f(x,y,z) = x - 2y + 3z$ unter den Nebenbedingungen

$$x^2 + z^2 = 18, \quad x + y = 1,$$

die eine Ellipse als Schnitt eines Zylinders mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem zur Lösung dieser Aufgabe an (Methode von Lagrange). *[2 P.]*

b) Geben Sie alle Lösungen an. *[4 P.]*

Hinweis: Ein Lagrange-Parameter ergibt sich unmittelbar; kann der andere $=0$ sein?

LÖSUNG

a) Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x - 2y + 3z$ unter den Nebenbedingungen $\varphi_1(x,y,z) = x^2 + z^2 - 18 = 0$ und $\varphi_2(x,y,z) = x + y - 1 = 0$.

Die Methode von Langrange führt auf

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda,\mu) &= f(x,y,z) + \lambda\,\varphi_1(x,y,z) + \mu\,\varphi_2(x,y,z) \\ &= x - 2y + 3z + \lambda\,(x^2 + z^2 - 18) + \mu\,(x + y - 1)\,. \end{aligned}$$

Da $\nabla\varphi_1(x,y,z) = (2x,0,2z) \neq (0,0,0)$ und $\nabla\varphi_2(x,y,z) = (1,1,0) \neq (0,0,0)$ für alle Punkte auf der Ellipse ist, erfüllen alle möglichen Extrema von $f(x,y,z)$ unter den Nebenbedingungen $\varphi_1(x,y,z) = 0$ und $\varphi_2(x,y,z) = 0$ das Gleichungssystem $\nabla F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$,

$$\begin{array}{llcll} (1) & F_x & = & 1 + 2\lambda x + \mu & = 0 \\ (2) & F_y & = & -2 + \mu & = 0 \\ (3) & F_z & = & 3 + 2\lambda z & = 0 \\ (4) & F_\lambda & = & x^2 + z^2 - 18 & = 0 \\ (5) & F_\mu & = & x + y - 1 & = 0\,. \end{array}$$

b) Aus (2) erhält man unmittelbar $\mu = 2$. Einsetzen von μ in (1) und zum Beispiel subtrahieren der Gleichungen (1) und (3) führt auf $2\lambda(x-z) = 0 \;\Rightarrow\; x = z$. $\lambda = 0$ widerspricht den Gleichungen (1) und (3). Aus Gleichung (4) folgt nun $x = z = \pm 3$ und aus (5) $z_1 = -2$ bzw $z_2 = 4$.

Die Extrema sind also $(3,-2,3)$ und $(-3,4,-3)$.