

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)
1. Test (DO, 5. Mai 2011) / Gruppe weiß (*mit Lösung*)

Aufgabe 1.

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 3 \ln x - 3 \ln y.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f . (1P)

b) In welchen Bereichen der Definitionsmenge ist die Funktion elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch? (1P)

c) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und geben Sie an, um welchen Typ es sich handelt. (2P)

Hinweis: Beachten Sie die Definitionsmenge von f .

d) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x, y)$ um die Stelle $(1, 1)$ bis zu den Termen zweiter Ordnung an (ohne Restglied). (2P)

LÖSUNG

a) Der Gradient und die Hessematrix von f sind

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y - \frac{3}{x} \\ 2x + 8y - \frac{3}{y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{x^2} & 2 \\ 2 & 8 + \frac{3}{y^2} \end{pmatrix}.$$

b) Aus

$$\det H_f(x, y) = \underbrace{\left(2 + \frac{3}{x^2}\right)}_{> 2} \underbrace{\left(8 + \frac{3}{y^2}\right)}_{> 8} - 4 > 16 - 4 = 12 > 0$$

folgt, dass alle Punkte des Definitionsbereiches elliptische Punkte von f sind.

c) Mit $\nabla f(x, y) = 0$ erhält man die stationären Punkte aus

$$\left. \begin{array}{l} 1.) \quad 2x + 2y - \frac{3}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2xy - 3 = 0 \\ 2.) \quad 2x + 8y - \frac{3}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8y^2 + 2xy - 3 = 0 \end{array} \right\} -$$

$$2x^2 - 8y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4y^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2y, \quad \text{da wegen Def. von } \ln \quad x, y > 0.$$

Einsetzen in 1.) oder 2.) liefert als einzige Lösung den Punkt $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Weil $\det H_f\left(1, \frac{1}{2}\right) > 0$ und $f_{xx}\left(1, \frac{1}{2}\right) > 0$, handelt es sich beim Punkt um ein lokales Minimum.

d) Mit

$$f(1, 1) = 7, \quad \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

ist die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(1, 1)$ bis zu den Termen 2. Ordnung

$$f(x, y) \approx 7 + (x - 1) + 7(y - 1) + \frac{5}{2}(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + \frac{11}{2}(y - 1)^2.$$

□

Aufgabe 2.

Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \cos(z) + x - 3 \\ x^2 \sin(z) - y + 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x, y, z)$ von f . (1P)
- b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $f(x, y, z) = \mathbf{0}$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 5, 0)$ nach (x, y) aufgelöst werden kann. (2P)
- c) Bestimmen Sie für die implizit definierte Kurve $(x(z), y(z))$ die Ableitungen von x und y nach z im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 5, 0)$. (2P)
- d) Bestimmen Sie für die implizit definierte Kurve $(x(z), y(z))$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 5, 0)$. (1P)

LÖSUNG

a) Die Jacobi-Matrix f ist

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & \cos z & -y \sin z \\ 2x \sin z & -1 & x^2 \cos z \end{pmatrix}.$$

b) Die Jacobi-Matrix im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 5, 0)$ ist

$$J_f(-2, 5, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mit

- ▷ $f(-2, 5, 0) = \mathbf{0}$,
- ▷ der Stetigkeit aller partiellen Ableitungen in \mathbb{R}^3 und damit auch in einer Umgebung des Punktes $(-2, 5, 0)$ sowie
- ▷ der Regularität der Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(-2, 5, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{da} \quad \det \left(\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(-2, 5, 0) \right) = -1 \neq 0,$$

sind alle Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt.

Das Gleichungssystem $f(x, y, z) = \mathbf{0}$ kann also in einer Umgebung des Punktes $(-2, 5, 0)$ nach (x, y) aufgelöst werden.

c) Als Folgerung des Satzes über implizite Funktionen erfüllt die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(x(z), y(z))}{\partial z}$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 5, 0)$ die Gleichung

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x(z), y(z))}{\partial z} = 0.$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

woraus nach Lösen des Gleichungssystems für $x'(0) = -4$ und $y'(0) = 4$ folgt.

Implizite Differentiation der Koordinatenfunktionen von f nach z und Einsetzen des Punktes liefert das selbe Gleichungssystem.

d) Für die Tangente in Parameterform gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x'(z_0) \\ y'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Eliminieren des Parameters s führt auf die Gleichung der Tangente $t : x + y = 3$. □

Aufgabe 3.

Zu bestimmen sind im Folgenden jene Punkte einer Ellipse, die zum Ursprung $(0,0)$ maximalen oder minimalen Abstand haben.

Die Gleichung der Ellipse lautet

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 11.$$

- a) Formulieren Sie das Problem als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung und lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Methode von Lagrange. (4P)
- b) Berechnen Sie die Abstände der in Punkt a) gefundenen Punkte zum Ursprung, um zu entscheiden, ob es sich jeweils um ein mögliches Maximum oder Minimum handelt.
Die Maximaleigenschaft bzw. Minimaleigenschaft der Lösungen muss *nicht* bewiesen werden. (1P)
- c) Wie lautet für die zu minimierende bzw. maximierende Funktion f ("Zielfunktion") die Gleichung der Tangente an die Niveaulinie $N_c(f) := \{(x,y) | f(x,y) = f(x_0,y_0) = c\}$ im Punkt $(x_0,y_0) = (-1,1)$? (1P)

LÖSUNG

- a) Mit dem Quadrat des Abstandes zum Ursprung als "Zielfunktion" $f(x,y) = x^2 + y^2$ und der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 11 = 0$ führt die Methode der Lagrange-Multiplikatoren auf

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 + 5xy + 3y^2 - 11).$$

Da für alle Punkte, die die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ erfüllen, $\nabla\varphi(x,y) \neq (0,0)$ ist, sind alle möglichen Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (1) \quad F_x &= 2x + \lambda(6x + 5y) = 0 \\ (2) \quad F_y &= 2y + \lambda(5x + 6y) = 0 \\ (3) \quad F_\lambda &= 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 11 = 0. \end{aligned}$$

Ausrechnen von λ aus (1) und (2) und anschließendes Gleichsetzen führt auf $x^2 = y^2$ und daher auf die zwei Lösungsfälle $x = y$ und $x = -y$.

▷ Für $x = y$ folgt nach Einsetzen in (3)

$$3y^2 + 5y^2 + 3y^2 = 11 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1, \quad x = \pm 1.$$

Damit sind die möglichen Extrema die Punkte $P_1(1,1)$ und $P_2(-1,-1)$.

▷ Für $x = -y$ folgt nach Einsetzen in (3)

$$3y^2 - 5y^2 + 3y^2 = 11 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{11}, \quad x = \mp\sqrt{11}.$$

Die möglichen Extrema sind also die Punkte $P_3(\sqrt{11}, -\sqrt{11})$ und $P_4(-\sqrt{11}, \sqrt{11})$.

- b) Nachdem die Funktion f das Quadrat der Abstände der Punkte auf der Ellipse zum Ursprung beschreibt, sind die Abstände von P_1, P_2, P_3 und P_4 zum Ursprung
- ▷ $\sqrt{f(1,1)} = \sqrt{f(-1,-1)} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad P_1$ und P_2 sind die Minima (entsprechen den Nebenseitelpunkten der Ellipse) und
- ▷ $\sqrt{f(\sqrt{11}, -\sqrt{11})} = \sqrt{f(-\sqrt{11}, \sqrt{11})} = \sqrt{22} \quad \rightarrow \quad P_3$ und P_4 sind die Maxima (entsprechen den Hauptscheitelpunkten der Ellipse).
- c) Da in jedem Punkt \mathbf{x} der Niveaulinie $N_c(f)$ die Tangente senkrecht zum Gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ ist, erfüllt die Tangente an die Niveaulinie im Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (-1, 1)$ die Gleichung

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0, \\ -2(x + 1) + 2(y - 1) &= 0, \end{aligned}$$

und die Gleichung der Tangente daher $t: -x + y = 2$.

Wenn man als Zielfunktion den Abstand und nicht das Quadrat des Abstandes verwendet, erhält man als Lösung die selbe Tangente.

□

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)
1. Test (DO, 5. Mai 2011) / Gruppe bunt (*mit Lösung*)

Aufgabe 1.

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 9x^2 + 2xy + y^2 - 6 \ln x - 6 \ln y.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f . (1P)

b) In welchen Bereichen der Definitionsmenge ist die Funktion elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch? (1P)

c) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und geben Sie an, um welchen Typ es sich handelt. (2P)

Hinweis: Beachten Sie die Definitionsmenge von f .

d) Geben Sie die Taylorentwicklung von $f(x, y)$ um die Stelle $(1, 1)$ bis zu den Termen zweiter Ordnung an (ohne Restglied). (2P)

LÖSUNG

a) Der Gradient und die Hessematrix von f sind

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 18x + 2y - \frac{6}{x} \\ 2x + 2y - \frac{6}{y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 18 + \frac{6}{x^2} & 2 \\ 2 & 2 + \frac{6}{y^2} \end{pmatrix}.$$

b) Aus

$$\det H_f(x, y) = \underbrace{\left(18 + \frac{6}{x^2}\right)}_{> 18} \underbrace{\left(2 + \frac{6}{y^2}\right)}_{> 2} - 4 > 36 - 4 = 32 > 0$$

folgt, dass alle Punkte des Definitionsbereiches elliptische Punkte von f sind.

c) Mit $\nabla f(x, y) = 0$ erhält man die stationären Punkte aus

$$\left. \begin{array}{l} 1.) \quad 18x + 2y - \frac{6}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 18x^2 + 2xy - 6 = 0 \\ 2.) \quad 2x + 2y - \frac{6}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 + 2xy - 6 = 0 \end{array} \right\} -$$

$$18x^2 - 2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 9x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 3x, \quad \text{da wegen Def. von } \ln \quad x, y > 0.$$

Einsetzen in 1.) oder 2.) liefert als einzige Lösung den Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Weil $\det H_f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) > 0$ und $f_{xx}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) > 0$, handelt es sich beim Punkt um ein lokales Minimum.

d) Mit

$$f(1, 1) = 12, \quad \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 24 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

ist die Taylorentwicklung von f an der Stelle $(1, 1)$ bis zu den Termen 2. Ordnung

$$f(x, y) \approx 12 + 14(x - 1) - 2(y - 1) + 12(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) + 4(y - 1)^2.$$

□

Aufgabe 2.

Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \sin(z) - y + 2 \\ y^2 \cos(z) - x + 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x, y, z)$ von f . (1P)
- b) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $f(x, y, z) = \mathbf{0}$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0) = (8, 2, 0)$ nach (x, y) aufgelöst werden kann. (2P)
- c) Bestimmen Sie für die implizit definierte Kurve $(x(z), y(z))$ die Ableitungen von x und y nach z im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (8, 2, 0)$. (2P)
- d) Bestimmen Sie für die implizit definierte Kurve $(x(z), y(z))$ die Gleichung der Tangente an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (8, 2, 0)$. (1P)

LÖSUNG

a) Die Jacobi-Matrix von f ist

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin z & -1 & x \cos z \\ -1 & 2y \cos z & -y^2 \sin z \end{pmatrix}.$$

b) Die Jacobi-Matrix im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (8, 2, 0)$ ist

$$J_f(8, 2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit

- ▷ $f(8, 2, 0) = \mathbf{0}$,
- ▷ der Stetigkeit aller partiellen Ableitungen in \mathbb{R}^3 und damit auch in einer Umgebung des Punktes $(8, 2, 0)$ sowie
- ▷ der Regularität der Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(8, 2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{da} \quad \det \left(\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(8, 2, 0) \right) = -1 \neq 0,$$

sind alle Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt.

Das Gleichungssystem $f(x, y, z) = \mathbf{0}$ kann also in einer Umgebung des Punktes $(8, 2, 0)$ nach (x, y) aufgelöst werden.

c) Als Folgerung des Satzes über implizite Funktionen erfüllt die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(x(z), y(z))}{\partial z}$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0) = (8, 2, 0)$ die Gleichung

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x(z), y(z))}{\partial z} = \mathbf{0}.$$

Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

woraus nach Lösen des Gleichungssystems für $x'(0) = 32$ und $y'(0) = 8$ folgt.

Implizite Differentiation der Koordinatenfunktionen von f nach z und Einsetzen des Punktes liefert das selbe Gleichungssystem.

d) Für die Tangente in Parameterform gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x'(z_0) \\ y'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 32 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Eliminieren des Parameters s führt auf die Gleichung der Tangente $t : x - 4y = 0$. □

Aufgabe 3.

Zu bestimmen sind im Folgenden jene Punkte einer Ellipse, die zum Ursprung $(0,0)$ maximalen oder minimalen Abstand haben.

Die Gleichung der Ellipse lautet

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 = 7.$$

- a) Formulieren Sie das Problem als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung und lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Methode von Lagrange. (4P)
- b) Berechnen Sie die Abstände der in Punkt a) gefundenen Punkte zum Ursprung, um zu entscheiden, ob es sich jeweils um ein mögliches Maximum oder Minimum handelt.
Die Maximaleigenschaft bzw. Minimaleigenschaft der Lösungen muss *nicht* bewiesen werden. (1P)
- c) Wie lautet für die zu minimierende bzw. maximierende Funktion f ("Zielfunktion") die Gleichung der Tangente an die Niveaulinie $N_c(f) := \{(x,y) | f(x,y) = f(x_0,y_0) = c\}$ im Punkt $(x_0,y_0) = (1,2)$? (1P)

LÖSUNG

- a) Mit dem Quadrat des Abstandes zum Ursprung als "Zielfunktion" $f(x,y) = x^2 + y^2$ und der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 7 = 0$ führt die Methode der Lagrange-Multiplikatoren auf

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(2x^2 - 3xy + 2y^2 - 7).$$

Da für alle Punkte, die die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ erfüllen, $\nabla\varphi(x,y) \neq (0,0)$ ist, sind alle möglichen Extrema von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (1) \quad F_x &= 2x + \lambda(4x - 3y) = 0 \\ (2) \quad F_y &= 2y + \lambda(-3x + 4y) = 0 \\ (3) \quad F_\lambda &= 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 7 = 0. \end{aligned}$$

Ausrechnen von λ aus (1) und (2) und anschließendes Gleichsetzen führt auf $x^2 = y^2$ und daher auf die zwei Lösungsfälle $x = y$ und $x = -y$.

▷ Für $x = y$ folgt nach Einsetzen in (3)

$$2y^2 - 3y^2 + 2y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7}, \quad x = \pm\sqrt{7}.$$

Damit sind die möglichen Extrema die Punkte $P_1(\sqrt{7}, \sqrt{7})$ und $P_2(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$.

▷ Für $x = -y$ folgt nach Einsetzen in (3)

$$2y^2 + 3y^2 + 2y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm 1, \quad x = \mp 1.$$

Die möglichen Extrema sind also die Punkte $P_3(1, -1)$ und $P_4(-1, 1)$.

- b) Nachdem die Funktion f das Quadrat der Abstände der Punkte auf der Ellipse zum Ursprung beschreibt, sind die Abstände von P_1, P_2, P_3 und P_4 zum Ursprung
- ▷ $\sqrt{f(\sqrt{7}, \sqrt{7})} = \sqrt{f(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})} = \sqrt{14} \rightarrow P_1$ und P_2 sind die Maxima (entsprechen den Hauptscheitelpunkten der Ellipse) und
- ▷ $\sqrt{f(1, -1)} = \sqrt{f(-1, 1)} = \sqrt{2} \rightarrow P_3$ und P_4 sind die Minima (entsprechen den Nebenscheitelpunkten der Ellipse).
- c) Da in jedem Punkt \mathbf{x} der Niveaulinie $N_c(f)$ die Tangente senkrecht zum Gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ ist, erfüllt die Tangente an die Niveaulinie im Punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (1, 2)$ die Gleichung

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) &= 0, \\ 2(x - 1) + 4(y - 2) &= 0, \end{aligned}$$

und die Gleichung der Tangente daher $t: x + 2y = 5$.

Wenn man als Zielfunktion den Abstand und nicht das Quadrat des Abstandes verwendet, erhält man als Lösung die selbe Tangente.

□