Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2011

A N A L Y S I S II F Ü R T P H, UE (103.091)

2. Test (FR, 17. Juni 2011) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem:

$$x'(t) = f(x(t),t) \quad \text{mit} \quad f(x(t),t) = 3\,t^2\,x(t)\,, \quad x_0 = x(0) = 1\,, \quad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie eine Näherungslösung für $x(t)$, indem Sie mindestens 3 Schritte der Fixpunktiteration

$$x_{n+1}(t) := x_0 + \int_0^t f(x_n(s),s)\,\mathrm{d}s\,, \quad n \geq 0,$$

durchführen, d.h. berechnen Sie $x_i(t)$ für $i = 1, 2, 3$. (4P)

b) Stellen Sie mit Hilfe der in Punkt a) gefundenen Näherungslösung eine Vermutung für die n–te Näherungslösung $x_n(t)$ sowie für $x(t)$ als Grenzwert der Funktionenfolge $\{x_n(t)\}$ an. Zeigen Sie, dass die so gefundene Lösung $x(t)$ Lösung des Anfangswertproblemes ist. (2P)

LÖSUNG

a) Die ersten 3 Näherungslösungen lauten

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_0,s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \int_0^t 3s^2\,x_0\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t 3s^2\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t^3, \\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_1(s),s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \int_0^t 3s^2\,x_1(s)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t 3s^2(1+s^3)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t (3s^2 + 3s^5)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t^3 + \frac{t^6}{2}\,, \\
x_3(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_2(s),s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \int_0^t 3s^2\,x_2(s)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t 3s^2(1+s^3+\frac{s^6}{2})\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t (3s^2 + 3s^5 + \frac{3}{2}\,s^8)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t^3 + \frac{t^6}{2} + \frac{t^9}{6}\,.
\end{aligned}$$

b) Die Vermutung für die n–te Näherungslösung $x_n(t)$ und damit für $x(t)$ ist

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{3k}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t^3)^k}{k!} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^3)^k}{k!} = \mathrm{e}^{t^3}\,.$$

Mit $x(t=0) = 1$ ist einmal die Anfangsbedingung richtig. Ableiten von $x(t)$ und Einsetzen in obige Differentialgleichung,

$$x'(t) = 3t^2\mathrm{e}^{t^3} = 3t^2 x(t)\,,$$

bestätigt, dass $x(t) = \mathrm{e}^{t^3}$ die Differentialgleichung erfüllt und somit Lösung des Anfangswertproblemes ist.

□

Aufgabe 2.

Gegeben ist die Funktion $f : [-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2\,x - \pi\,.$$

a) Berechnen Sie die trigonometrische Fourierreihe der 4π-periodisch fortgesetzten Funktion f. (5P)

b) Geben Sie an, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe punktweise gegen die periodisch fortgesetzte Funktion f konvergiert. (1P)

LÖSUNG

a) Nachdem $f(x) = 2\,x - \pi$ einer Streckung der Funktion $g(x) = x$ um den Faktor 2 und einer Verschiebung um $-\pi$ entspricht, genügt es, die im Intervall von $a = -2\pi$ bis $b = 2\pi$ ungerade Funktion $g(x) = x$ in eine Fourierreihe zu entwickeln, um anschließend auf die Fourierreihe von f zu schließen.
Die Intervalllänge $b-a$ ist 4π. Die Fourierreihe von $g(x) = x$ ist aus Symmetriegründen eine "Sinusreihe". Für $k \in \mathbb{N}, k > 0$, sind die Fourierkoeffizienten also

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\,, \\
a_k &= 0\,, \\
b_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\sin\frac{2k\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} x\,\sin\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{4\pi}\,2\int_0^{2\pi} x\,\sin\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}\right)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\left(-\frac{2}{k}\cos(k\pi)\right) - \underbrace{(0)\left(-\frac{2}{k}\cos(0)\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{k}\frac{2}{k}\sin\frac{kx}{2}\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi}{k}\cos(k\pi)\right] \;=\; -\frac{4}{k}\cos(k\pi) \;=\; -\frac{4}{k}\,(-1)^k\,.
\end{aligned}$$

Die trigonometrische Fourierreihe von $g(x)$ ist

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\,\cos\frac{2k\pi x}{b-a} + b_k\,\sin\frac{2k\pi x}{b-a}\right] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{4}{k}\,(-1)^k\right]\sin\frac{kx}{2}\,,$$

und für $f(x) = -\pi + 2\,g(x)$ somit

$$f(x) \sim -\pi - 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,\sin\frac{kx}{2}\,.$$

Ohne Ausnutzen der Superposition führt die Berechnung aller Fourierkoeffizienten für f auf $a_0 = -2\pi$, $a_k = 0$ und $b_k = -\frac{8}{k}\,(-1)^k$ für $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und schlussendlich auf das gleiche Ergebnis.

b) Die trigonometrische Fourierreihe konvergiert punktweise gegen die periodisch fortgesetzte Funktion f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi + 4k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, da an den Sprungstellen $x_k = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$, das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert $\frac{f(x_k+)+f(x_k-)}{2} = -\pi \neq -5\pi = f(x_k)$ ist.

$\square$

Aufgabe 3.

Gegeben sind die komplexe Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ (B ist der größtmöglichste Definitionsbereich von f in der Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$),

$$f(z) = \frac{z^2 + 2\,z + 1}{i\,z - \dfrac{3}{i}}\,,$$

und die beiden geschlossenen Kurven C_1 und C_2 (positive Orientierung), wobei

- ▷ C_1 der Kreis $C_1 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z+3| = 1\}$ und
- ▷ C_2 das Rechteck mit den Eckpunkten $-2 \pm i$ und $2 \pm i$ ist.

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ *mit Hilfe* einer geeigneten Parameterisierung des Kreises C_1. (3P)

b) Lösen Sie das Integral $\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ unter Zuhilfenahme einer geeigneten Integrationsmethode *ohne* den Kreis C_1 zu parameterisieren. (2P)

c) Bestimmen Sie die Lösung des Integrals $\oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ (genaue Argumentation der Vorgehensweise!). (1P)

LÖSUNG

a) Mit Hilfe der Parameterdarstellung des Kreises C_1 mit Mittelpunkt $z_0 = -3$ und Radius $r = 1$,

$$z = z_0 + re^{i\varphi} = -3 + e^{i\varphi} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}z = i\,e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,$$

ist

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \frac{z^2+2\,z+1}{i\,z-\dfrac{3}{i}}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{i}\oint_{C_1}\frac{z^2+2\,z+1}{z+3}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi}\frac{(-3+e^{i\varphi})^2+2(-3+e^{i\varphi})+1}{-3+e^{i\varphi}+3}\,i\,e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} e^{2i\varphi} - 4\,e^{i\varphi} + 4\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2i}\,e^{2i\varphi} - \frac{4}{i}\,e^{i\varphi} + 4\varphi\,\Big|_0^{2\pi} = 8\pi\,.\end{aligned}$$

b) Zum Beispiel mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel erhält man die Lösung

$$\oint_{C_1} \frac{z^2+2\,z+1}{i\,z-\dfrac{3}{i}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\oint_{C_1}\frac{z^2+2\,z+1}{z+3}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\frac{1}{i}\,(z^2+2z+1)\Big|_{z=-3} = 8\pi\,,$$

da die Polstelle bei $z = -3$ innerhalb des vom Kreis C_1 berandeten Gebietes liegt.

c) Da die Polstelle $z = -3$ außerhalb des vom Rechteck C_2 berandeten Gebietes liegt, ist f in einem Gebiet, in dem die geschlossene Kurve C_2 verläuft, differenzierbar. Laut dem Cauchy'schen Integralsatz gilt daher

$$\oint_{C_2} \frac{z^2+2\,z+1}{i\,z-\dfrac{3}{i}}\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

□

Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2011

A N A L Y S I S I I F Ü R T P H, UE (103.091)

2. Test (FR, 17. Juni 2011) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem:

$$x'(t) = f(x(t),t) \quad \text{mit} \quad f(x(t),t) = 2\,t\,x(t)\,, \quad x_0 = x(0) = 1\,, \quad t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie eine Näherungslösung für $x(t)$, indem Sie mindestens 3 Schritte der Fixpunktiteration

$$x_{n+1}(t) := x_0 + \int_0^t f(x_n(s),s)\,\mathrm{d}s\,, \quad n \geq 0,$$

durchführen, d.h. berechnen Sie $x_i(t)$ für $i = 1,2,3$. (4P)

b) Stellen Sie mit Hilfe der in Punkt a) gefundenen Näherungslösung eine Vermutung für die n–te Näherungslösung $x_n(t)$ sowie für $x(t)$ als Grenzwert der Funktionenfolge $\{x_n(t)\}$ an. Zeigen Sie, dass die so gefundene Lösung $x(t)$ Lösung des Anfangswertproblemes ist. (2P)

LÖSUNG

a) Die ersten 3 Näherungslösungen lauten

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_0,s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \int_0^t 2s\,x_0\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t 2s\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t^2, \\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_1(s),s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \int_0^t 2s\,x_1(s)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t 2s(1+s^2)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t (2s+2s^3)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\,, \\
x_3(t) &= x_0 + \int_0^t f(x_2(s),s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \int_0^t 2s\,x_2(s)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t 2s(1+s^2+\frac{s^4}{2})\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t (2s+2s^3+s^5)\,\mathrm{d}s \\
&= 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}\,.
\end{aligned}$$

b) Die Vermutung für die n–te Näherungslösung $x_n(t)$ und damit für $x(t)$ ist

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t^2)^k}{k!} \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^k}{k!} = \mathrm{e}^{t^2}\,.$$

Mit $x(t=0) = 1$ ist einmal die Anfangsbedingung richtig. Ableiten von $x(t)$ und Einsetzen in obige Differentialgleichung,

$$x'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2} = 2t\,x(t)\,,$$

bestätigt, dass $x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ die Differentialgleichung erfüllt und somit Lösung des Anfangswertproblemes ist.

□

Aufgabe 2.

Gegeben ist die Funktion $f : (-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -3\,x + \pi\,.$$

a) Berechnen Sie die trigonometrische Fourierreihe der 4π-periodisch fortgesetzten Funktion f. (5P)

b) Geben Sie an, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe punktweise gegen die periodisch fortgesetzte Funktion f konvergiert. (1P)

LÖSUNG

a) Nachdem $f(x) = -3\,x + \pi$ einer Streckung der Funktion $g(x) = x$ um den Faktor -3 und einer Verschiebung um $+\pi$ entspricht, genügt es, die im Intervall von $a = -2\pi$ bis $b = 2\pi$ ungerade Funktion $g(x) = x$ in eine Fourierreihe zu entwickeln, um anschließend auf die Fourierreihe von f zu schließen.
Die Intervalllänge $b-a$ ist 4π. Die Fourierreihe von $g(x) = x$ ist aus Symmetriegründen eine "Sinusreihe". Für $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, sind die Fourierkoeffizienten also

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\,,\\
a_k &= 0\,,\\
b_k &= \frac{2}{b-a}\int_a^b g(x)\sin\frac{2k\pi x}{b-a}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} x\,\sin\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{4\pi}\,2\int_0^{2\pi} x\,\sin\frac{kx}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}\right)\bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{k}\cos\frac{kx}{2}\right)\mathrm{d}x\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[2\pi\left(-\frac{2}{k}\cos(k\pi)\right) - \underbrace{(0)\left(-\frac{2}{k}\cos(0)\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{k}\frac{2}{k}\sin\frac{kx}{2}\bigg|_0^{2\pi}}_{=0}\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi}{k}\cos(k\pi)\right] \;=\; -\frac{4}{k}\cos(k\pi) \;=\; -\frac{4}{k}\,(-1)^k\,.
\end{aligned}$$

Die trigonometrische Fourierreihe von $g(x)$ ist

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\,\cos\frac{2k\pi x}{b-a} + b_k\,\sin\frac{2k\pi x}{b-a}\right] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{4}{k}\,(-1)^k\right]\sin\frac{kx}{2}\,,$$

und für $f(x) = \pi - 3\,g(x)$ somit

$$f(x) \sim \pi + 12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,\sin\frac{kx}{2}\,.$$

Ohne Ausnutzen der Superposition führt die Berechnung aller Fourierkoeffizienten für f auf $a_0 = 2\pi$, $a_k = 0$ und $b_k = \frac{12}{k}\,(-1)^k$ für $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und schlussendlich auf das gleiche Ergebnis.

b) Die trigonometrische Fourierreihe konvergiert punktweise gegen die periodisch fortgesetzte Funktion f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi + 4k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, da an den Sprungstellen $x_k = 2\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$, das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert $\frac{f(x_k+)+f(x_k-)}{2} = \pi \neq -5\pi = f(x_k)$ ist.

□

Aufgabe 3.

Gegeben sind die komplexe Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ (B ist der größtmöglichste Definitionsbereich von f in der Menge der komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$),

$$f(z) = \frac{z^2 - 3\,z - 1}{2\,i + \dfrac{z}{i}}\,,$$

und die beiden geschlossenen Kurven C_1 und C_2 (positive Orientierung), wobei

- ▷ C_1 der Kreis $C_1 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-2| = 1\}$ und
- ▷ C_2 das Rechteck mit den Eckpunkten $-1 \pm 2\,i$ und $1 \pm 2\,i$ ist.

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ *mit Hilfe* einer geeigneten Parameterisierung des Kreises C_1. (3P)

b) Lösen Sie das Integral $\oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ unter Zuhilfenahme einer geeigneten Integrationsmethode *ohne* den Kreis C_1 zu parameterisieren. (2P)

c) Bestimmen Sie die Lösung des Integrals $\oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ (genaue Argumentation der Vorgehensweise!). (1P)

LÖSUNG

a) Mit Hilfe der Parameterdarstellung des Kreises C_1 mit Mittelpunkt $z_0 = 2$ und Radius $r = 1$,

$$z = z_0 + re^{i\varphi} = 2 + e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}z = i\,e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,,$$

ist

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \frac{z^2 - 3\,z - 1}{2\,i + \dfrac{z}{i}}\,\mathrm{d}z &= -\frac{1}{i}\oint_{C_1} \frac{z^2 - 3\,z - 1}{z-2}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{(2+e^{i\varphi})^2 - 3(2+e^{i\varphi}) - 1}{2 + e^{i\varphi} - 2}\,i\,e^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\int_0^{2\pi} e^{2i\varphi} + e^{i\varphi} - 3\,\mathrm{d}\varphi = -\left(\frac{1}{2i}\,e^{2i\varphi} + \frac{1}{i}\,e^{i\varphi} - 3\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi\,.\end{aligned}$$

b) Zum Beispiel mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel erhält man die Lösung

$$\oint_{C_1} \frac{z^2 - 3\,z - 1}{2\,i + \dfrac{z}{i}}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{i}\oint_{C_1} \frac{z^2 - 3\,z - 1}{z-2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(-\frac{1}{i}\right)\,(z^2 - 3z - 1)\Big|_{z=2} = 6\pi\,,$$

da die Polstelle bei $z = 2$ innerhalb des vom Kreis C_1 berandeten Gebietes liegt.

c) Da die Polstelle $z = 2$ außerhalb des vom Rechteck C_2 berandeten Gebietes liegt, ist f in einem Gebiet, in dem die geschlossene Kurve C_2 verläuft, differenzierbar. Laut dem Cauchy'schen Integralsatz gilt daher

$$\oint_{C_2} \frac{z^2 - 3\,z - 1}{2\,i + \dfrac{z}{i}}\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

□