Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2012

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Nachtest (DI, 9.10.2012) *(mit Lösung)*

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = 1 - 4x - 8y + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2)}$

a) (i) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. *a): 3 P.*

(ii) Geben Sie alle stationären Punkte von f samt ihrem Typ an.

(iii) Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene von f an der Stelle $(2t, -t)$ für beliebige t an.

(i)
$$\nabla f = \begin{pmatrix} -4 + x + 2y \\ -8 + 2x + 4y \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) Alle Punkte auf der Geraden $x + 2y = 4$. Diese sind parabolisch, da H singulär ist. (Jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist parabolisch.)

(iii) $f(2t,-t) + \nabla f(2t,-t) \begin{pmatrix} x - 2t \\ y + t \end{pmatrix} = 1 + \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2t \\ y + t \end{pmatrix} = 1 - 4x - 8y$

b) Gegeben sei das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\boxed{g(x,y,z) = z\,\nabla f(x,y) + \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (\,f \text{ wie oben}\,)}$

(i) Berechnen Sie die Jacobi Matrix von g. *b) (i+ii): 3 P.*

(ii) Geben Sie die Linearisierung von g an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 1)$ explizit als Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$ an.

(iii) Bestimmen Sie für die durch $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ impliziert definierte Kurve $(x(z), y(z), z)$ im $\mathbb{R}^3$ den Tangentialvektor an dem Kurvenpunkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$. **b) (iii): 2 Extra-P.**

(i)
$$J = \begin{pmatrix} z & 2z+1 & -4 + x + 2y \\ 2z+1 & 4z & -8 + 2x + 4y \end{pmatrix}$$

(ii)
$$g(x_0,y_0,z_0) + J(x_0,y_0,z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y - 4 \\ 3x + 4y - 8 \end{pmatrix}$$

(iii) Mit
$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} z & 2z+1 \\ 2z+1 & 4z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} x + 2y - 4 \\ 2x + 4y - 8 \end{pmatrix}$$

ergibt implizite Differentiation an der Stelle $(1,1,0)$:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dz}\left(g(x(z), y(z), z\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\frac{\partial g}{\partial(x,y)} \text{ an (1,1,0) invertierbar}} \cdot \begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\frac{\partial g}{\partial z} \text{ an (1,1,0)}}$$

Daraus: $x'(z) = 2$, $y'(z) = 1$ an $(1,1,0)$, und der Tangentialvektor an die Kurve ist daher
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{an } (1,1,0). \qquad \left(\,\tfrac{d}{dz} z = 1\,\right)$$

- **Aufgabe 2.** Zugrunde liege der Raum $\ell^1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ mit der Norm $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, und gegeben sei die Abbildung $\boxed{S(x) = \left(x_1, x_2 - \frac{x_1}{2}, x_3 - \frac{x_2}{2}, \dots\right)}$ mit $x \in \ell^1$.

a) Zeigen Sie: S ist eine Abbildung von ℓ^1 nach ℓ^1. *a): 3 P.*

Für jedes $x \in \ell^1$ ist

$$\|S(x)\|_1 = |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty} \left|x_n - \frac{x_{n-1}}{2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{x_{n-1}}{2}\right| = \frac{3}{2}\|x\|_1 < \infty \quad \Rightarrow \quad S(x) \in \ell^1$$

b) Überprüfen Sie, ob die Abbildung S stetig ist. *b): 1 P.*

S ist stetig, da linear (klar) und beschränkt (siehe Lösung zu (i)).

c) Geben Sie eine obere Schranke für die Operatornorm von S an. *c): 2 P.*

Für eine <u>exakte Berechnung</u> der Operatornorm gibt es maximal **1.5 Extra-Punkte.**

(iii) Aus $\|S(x)\|_1 \leq \frac{3}{2}\|x\|_1$ (siehe (i)) $\underline{\text{und } \|S(1,0,0,\dots)\|_1 = \|(1, -\frac{1}{2}, 0, \dots)\|_1 = \frac{3}{2}}$ folgt:

$$\|S\|_1 = \frac{3}{2}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Überprüfen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f(z)$ komplex differenzierbar ist: *a): 2 P.*

$$\boxed{f(z) = z\,\mathrm{Re}(z) + i\,\bar{z}\,\mathrm{Im}(z)}$$

$$f(z) = (x+iy)\,x + i\,(x-iy)\,y = x^2 + 2\,i\,xy + y^2 = \underbrace{x^2+y^2}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(2xy)}_{v(x,y)},$$

mit u, v stetig differenzierbar.
Nachprüfen der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{O.K., jedoch:} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \quad \text{nicht O.K.}$$

Zweite CR-Differentialgleichung ist verletzt, außer für $y = 0$.
$\Rightarrow$ f komplex differenzierbar für $z \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie den Grenzwert: *b): 2 P.*

$$\boxed{\lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \frac{e^z - i - \frac{\pi}{2} - iz}{z^2 - i\,\pi z - \frac{\pi^2}{4}}}$$

Für $z = i\,\frac{\pi}{2}$ ist

$$e^z - i - \tfrac{\pi}{2} - iz \;=\; e^{i\frac{\pi}{2}} - i - \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} = i - i = 0$$

$$z^2 - i\,\pi z - \frac{\pi^2}{4} \;=\; -\tfrac{\pi^2}{4} + \tfrac{\pi^2}{2} - \tfrac{\pi^2}{4} = 0$$

De l'Hospital (nach einmaliger Anwendung noch immer $0/0$, also zweimal anwenden):

$$\lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \frac{e^z - i - \frac{\pi}{2} - iz}{z^2 - i\,\pi z - \frac{\pi^2}{4}} = \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \frac{e^z - i}{2z - i\pi} = \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \frac{e^z}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2} \;=\; \frac{i}{2}\,.$$

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral: *c): 2 P.*

$$\boxed{\oint_C \frac{z^2+2}{1-\frac{z}{i}}\,dz} \quad \text{mit } C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$$

Umformen auf Cauchy-Integral:

$$\oint_C \frac{z^2+2}{1-\frac{z}{i}}\,dz = \frac{1}{i}\oint_C \frac{z^2+2}{z-i}\,dz = \frac{1}{i}\,2\pi i\,(i^2+2) \;=\; 2\pi$$