Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2012

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 1 (DI, 08.05.2012) / Gruppe 1 ***(mit Lösung)***

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = x^3 + 4\,xy + y^3 + 5}$

a) (i) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung an der Stelle $(0,0)$ an.

(iii) Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene von f an der Stelle $(0,0)$ an.

(i)
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3\,x^2 + 4\,y \\ 4\,x + 3\,y^2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 6\,x & 4 \\ 4 & 6\,y \end{pmatrix}$$

(ii)
$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) + \tfrac{1}{2}\,(x,y)\cdot H(0,0)\cdot(x,y) = 5 + 4\,xy$$

(Dies liest man auch direkt aus der Definition von f ab.)

(iii) $T(x,y) = 5$

b) (i) Geben Sie alle stationären Punkte von f samt ihrem Typ an. *b): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie y so an, dass $(1,y)$ ein parabolischer Punkt von f ist.

(i) $(x,y) = (0,0)$, Sattelpunkt (H indefinit)

$(x,y) = (-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$, lokales Maximum ($H$ negativ definit)

(ii) Es muss gelten $\det H(1,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 4/9$

c) (i) Für welche $(x,y) = (\xi,\eta)$ lässt sich die durch (ξ,η) verlaufende Niveaulinie von f

(i1) *nicht* lokal nach x parametrisieren ($y = y(x)$), bzw. *c): 3 P.*

(i2) *nicht* lokal nach y parametrisieren ($x = x(y)$)?

(i3) *weder* nach x *noch* nach y? Was passiert an diesen Stellen?

(ii) Geben Sie explizite Formelausdrücke für die Ableitungen $y'(x)$ bzw. $x'(y)$ an beliebigen Stellen (ξ,η) an, an denen die betreffende Auflösungsfunktion $y(x)$ bzw. $x(y)$ *existiert*. Geben sie auch die beiden Werte konkret an der Stelle $(\xi,\eta) = (1,0)$ an.

(i) Niveaulinie: implizit definiert durch $f(x,y) = f(\xi,\eta) = \text{const.}$

(i1) Falls gilt $f_y(\xi,\eta) = 0$, d.h. $\xi = -\frac{3}{4}\,\eta^2$

(i2) Falls gilt $f_x(\xi,\eta) = 0$, d.h. $\eta = -\frac{3}{4}\,\xi^2$

(i3) Falls gilt $\nabla f(\xi,\eta) = 0$, d.h. an den stationären Punkten (siehe b))

(Niveaulinie entartet zu singulärem Punkt)

(ii) Implizit differenzieren:

$$f_y \neq 0\colon\ 0 = \tfrac{d}{dx}\,f(x,y(x)) = f_x + f_y\,y' \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -f_x/f_y$$
$$f_x \neq 0\colon\ 0 = \tfrac{d}{dy}\,f(x(y),y) = f_x\,x' + f_y \quad \Rightarrow \quad x'(y) = -f_y/f_x$$

mit f_x, f_y aus a). An $(\xi,\eta) = (1,0)$: $\quad y'(1) = -3/4,\ \ x'(0) = -4/3$

• **Aufgabe 2.** Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\boxed{f(u,v,w) = \begin{pmatrix} u+v+w \\ u+v^2+w^3 \end{pmatrix}}$

a) (i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die Linearisierung von f an der Stelle $(u_0, v_0, w_0) = (1,1,1)$ explizit in Form eines Vektorfeldes $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an.

(i)

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2\,v & 3\,w^2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T(u,v,w) = f(u_0,v_0,w_0) + J(u_0,v_0,w_0) \cdot \begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \\ w-w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u-1 \\ v-1 \\ w-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v+w \\ u+2\,v+3\,w-3 \end{pmatrix}$$

(mit $T_1(u,v,w) = f_1(u,v,w)$, da $f_1(u,v,w)$ linear).

b) Lässt sich die durch $f(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ impliziert definierte Kurve im $\mathbb{R}^3$ in einer Umgebung der Stelle[1] $(u_0,v_0,w_0) = (0,0,0)$ nach w parametrisieren? (Begründung angeben!) *b): 2 P.*

Betrachte partielle Jacobi-Matrix an der Stelle $(0,0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2\,v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ regulär}$$

$\Rightarrow$ lokal auflösbar nach u, v: $u = u(w)$, $v = v(w)$.

c) Schreiben Sie die Bedingungsgleichungen dafür an, dass – bei Variation des Punktes (u,v,w) entlang der gemäß b) definierten Kurve – die u-Koordinate ein lokales Extremum aufweist. *c): 2.5 P.*

Mit der Lagrange-Funktion

$$F(u,v,w,\lambda_1,\lambda_2) = \varphi(u,v,w) + \lambda_1 f_1(u,v,w) + \lambda_2 f_2(u,v,w)$$
$$= u + \lambda_1\,(u+v+w) + \lambda_2\,(u+v^2+w^3)$$

lautet das zugehörige Lagrange-System:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = \lambda_1 + 2\,\lambda_2\,v = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial w} = \lambda_1 + 3\,\lambda_2\,w^2 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = u+v+w = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = u+v^2+w^3 = 0$$

[1] Es gilt $f(0,0,0) = (0,0)$.

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei das lineare Funktional $f\colon (C[0,2], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) = \int_0^2 x(t)\, e^{-t}\, dt}$$

a) Zeigen Sie: f ist stetig. (Schreiben Sie ihren Beweis in das Kästchen.) *a): 2.5 P.*

Es gilt

$$|f(x)| = \left| \int_0^2 x(t)\, e^{-t}\, dt \right| \le \int_0^2 \max_{\tau \in [0,2]} |x(\tau)| \cdot e^{-t}\, dt = \int_0^2 e^{-t}\, dt \cdot \|x\|_\infty = \left(1 - \tfrac{1}{e^2}\right) \|x\|_\infty$$

Daher ist f beschränkt: $|f(x)| \le K\, \|x\|_\infty$, mit $K = 1 - \frac{1}{e^2}$.

$\Rightarrow$ f ist stetig.

b) Sei f wie unter a) definiert. *b): 3.5 P.*

Geben Sie für beliebiges $x \in C[0,2]$ eine Abschätzung der Gestalt

$$|f(X)| \le L\, \|x\|_\infty$$

an, wobei $X \in C[0,2]$ definiert ist als

$$X(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau\,.$$

Wie lautet die Konstante L?

Mit a) gilt $(K = 1 - \frac{1}{e^2})$

$$\begin{aligned} |f(X)| &\le K\, \|X\|_\infty = K \max_{t \in [0,2]} |X(t)| \\ &\le K \max_{t \in [0,2]} \left| \int_0^t x(\tau)\, d\tau \right| \\ &\le K \max_{t \in [0,2]} \int_0^t |x(\tau)|\, d\tau \\ &\le K \int_0^2 |x(\tau)|\, d\tau \le 2\, K\, \|x\|_\infty\,, \end{aligned}$$

also $L = 2\, K = 2 - \frac{2}{e^2}$. (Es gilt auch $|f(X)| \le K\, \|x\|_1$.)

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2012

A N A L Y S I S I I F Ü R T P H, U E (103.091)

Test 1 (DI, 08.05.2012) / Gruppe 2 ***(mit Lösung)***

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2\,u + v - w \\ u^3 + v + w^2 \end{pmatrix}}$$

a) (i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von g. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die Linearisierung von g an der Stelle $(u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$ explizit in Form eines Vektorfeldes $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an.

(i)

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3\,u^2 & 1 & 2\,w \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T(u,v,w) = g(u_0,v_0,w_0) + J(u_0,v_0,w_0) \cdot \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \\ w - w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u - 1 \\ v \\ w - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,u + v - w \\ 3\,u + v + 2\,w - 3 \end{pmatrix}$$

(mit $T_1(u,v,w) = g_1(u,v,w)$, da $g_1(u,v,w)$ linear).

b) Lässt sich die durch $g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ impliziert definierte Kurve im $\mathbb{R}^3$ in einer Umgebung der Stelle[1] $(u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 0)$ nach u parametrisieren? (Begründung angeben!) *b): 2 P.*

Betrachte partielle Jacobi-Matrix an der Stelle $(0,0,0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial(v,w)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2\,w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ regulär}$$

$\Rightarrow$ lokal auflösbar nach v, w: $v = v(u)$, $w = w(u)$.

c) Schreiben Sie die Bedingungsgleichungen dafür an, dass – bei Variation des Punktes (u,v,w) entlang der gemäß b) definierten Kurve – die v-Koordinate ein lokales Extremum aufweist. *c): 2.5 P.*

Mit der Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(u,v,w,\lambda_1,\lambda_2) &= \varphi(u,v,w) + \lambda_1\, g_1(u,v,w) + \lambda_2\, g_2(u,v,w) \\ &= v \;+\; \lambda_1\,(2\,u + v - w) + \lambda_2\,(u^3 + v + w^2) \end{aligned}$$

lautet das zugehörige Lagrange-System:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= 2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2\,u^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial w} &= -\lambda_1 + 2\,\lambda_2\,w = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= 2\,u + v - w = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= u^3 + v + w^2 = 0 \end{aligned}$$

[1] Es gilt $g(0,0,0) = (0,0)$.

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei das Skalarfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{g(x,y) = 2\,x^3 + 3\,xy + 2\,y^3 + 6}$

a) (i) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von g. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung an der Stelle $(0,0)$ an.

(iii) Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene von g an der Stelle $(0,0)$ an.

(i)
$$\nabla g = \begin{pmatrix} 6\,x^2 + 3\,y \\ 3\,x + 6\,y^2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 12\,x & 3 \\ 3 & 12\,y \end{pmatrix}$$

(ii)
$$g(x,y) = g(0,0) + \nabla g(0,0) + \tfrac{1}{2}\,(x,y)\cdot H(0,0)\cdot(x,y) = 6 + 3\,xy$$

(Dies liest man auch direkt aus der Definition von g ab.)

(iii) $T(x,y) = 6$

b) (i) Geben Sie alle stationären Punkte von g samt ihrem Typ an. *b): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie y so an, dass $(1,y)$ ein parabolischer Punkt von g ist.

(i) $(x,y) = (0,0)$, Sattelpunkt (H indefinit)

$(x,y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, lokales Maximum ($H$ negativ definit)

(ii) Es muss gelten $\det H(1,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1/16$

c) (i) Für welche $(x,y) = (\xi,\eta)$ lässt sich die durch (ξ,η) verlaufende Niveaulinie von g

(i1) *nicht* lokal nach x parametrisieren ($y = y(x)$), bzw. *c): 3 P.*

(i2) *nicht* lokal nach y parametrisieren ($x = x(y)$)?

(i3) *weder* nach x *noch* nach y? Was passiert an diesen Stellen?

(ii) Geben Sie explizite Formelausdrücke für die Ableitungen $y'(x)$ bzw. $x'(y)$ an beliebigen Stellen (ξ,η) an, an denen die betreffende Auflösungsfunktion $y'(x)$ bzw. $x'(y)$ existiert. Geben sie auch die beiden Werte konkret an der Stelle $(\xi,\eta) = (1,1)$ an.

(i) Niveaulinie: implizit definiert durch $g(x,y) = g(\xi,\eta) = \text{const.}$

(i1) Falls gilt $g_y = 0$, d.h. $\xi = -2\,\eta^2$

(i2) Falls gilt $g_x = 0$, d.h. $\eta = -2\,\xi^2$

(i3) Falls gilt $\nabla g(\xi,\eta) = 0$, d.h. an den stationären Punkten (siehe b))

(Niveaulinie entartet zu singulärem Punkt)

(ii) Implizit differenzieren:

$$g_y \neq 0\colon\; 0 = \tfrac{d}{dx}\,g(x,y(x)) = g_x + g_y\,y' \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -g_x/g_y$$
$$g_x \neq 0\colon\; 0 = \tfrac{d}{dy}\,g(x(y),y) = g_x\,x' + g_y \quad \Rightarrow \quad x'(y) = -g_y/g_x$$

mit g_x, g_y aus a). An $(\xi,\eta) = (1,1)$: $\quad y'(1) = -1,\; x'(1) = -1$

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei das lineare Funktional $g\colon (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{g(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, t^2\, dt}$$

a) Zeigen Sie: g ist stetig. (Schreiben Sie ihren Beweis in das Kästchen.) *a): 2.5 P.*

Es gilt

$$|g(x)| = \left| \int_{-1}^{1} x(t)\, t^2\, dt \right| \le \int_{-1}^{1} \max_{\tau \in [-1,1]} |x(\tau)| \cdot t^2\, dt = \int_{-1}^{1} t^2\, dt \cdot \|x\|_\infty = \tfrac{2}{3}\, \|x\|_\infty$$

Daher ist g beschränkt: $|g(x)| \le K\, \|x\|_\infty$, mit $K = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ g ist stetig.

b) Sei g wie unter a) definiert. *b): 3.5 P.*

Geben Sie für beliebiges $x \in C[-1,1]$ eine Abschätzung der Gestalt

$$|g(X)| \le L\, \|x\|_\infty$$

an, wobei $X \in C[-1,1]$ definiert ist als

$$X(t) = \int_{-1}^{t} x(\tau)\, d\tau\,.$$

Wie lautet die Konstante L?

Mit a) gilt ($K = \frac{2}{3}$)

$$\begin{aligned} |g(X)| &\le K\, \|X\|_\infty = K \max_{t \in [-1,1]} |X(t)| \\ &\le K \max_{t \in [-1,1]} \left| \int_{-1}^{t} x(\tau)\, d\tau \right| \\ &\le K \max_{t \in [-1,1]} \int_{-1}^{t} |x(\tau)|\, d\tau \\ &\le K \int_{-1}^{1} |x(\tau)|\, d\tau \le 2\, K\, \|x\|_\infty\,, \end{aligned}$$

also $L = 2K = \frac{4}{3}$. (Es gilt auch $|g(X)| \le K\, \|x\|_1$.)

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2012

A N A L Y S I S   I I   F Ü R   T P H,   U E (103.091)

Test 1 (DI, 08.05.2012) / Gruppe 3 ***(mit Lösung)***

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Skalarfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{g(u,v) = u^3 + 2\,uv + v^3 + 4}$

a) (i) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von g. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung an der Stelle $(0,0)$ an.

(iii) Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene von g an der Stelle $(0,0)$ an.

(i) $$\nabla g = \begin{pmatrix} 3\,u^2 + 2\,v \\ 2\,u + 3\,v^2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 6\,u & 2 \\ 2 & 6\,v \end{pmatrix}$$

(ii) $$g(u,v) = g(0,0) + \nabla g(0,0) + \tfrac{1}{2}\,(u,v)\cdot H(0,0)\cdot(u,v) = 4 + 2\,uv$$

(Dies liest man auch direkt aus der Definition von g ab.)

(iii) $T(u,v) = 4$

b) (i) Geben Sie alle stationären Punkte von g samt ihrem Typ an. *b): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie v so an, dass $(1,v)$ ein parabolischer Punkt von g ist.

(i) $(u,v) = (0,0)$, Sattelpunkt (H indefinit)

$(u,v) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, lokales Maximum ($H$ negativ definit)

(ii) Es muss gelten $\det H(1,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 1/9$

c) (i) Für welche $(u,v) = (u_0,v_0)$ lässt sich die durch (u_0,v_0) verlaufende Niveaulinie von g

(i1) *nicht* lokal nach u parametrisieren ($v = v(u)$), bzw. *c): 3 P.*

(i2) *nicht* lokal nach v parametrisieren ($u = u(v)$)?

(i3) *weder* nach u *noch* nach v? Was passiert an diesen Stellen?

(ii) Geben Sie explizite Formelausdrücke für die Ableitungen $v'(u)$ bzw. $u'(v)$ an beliebigen Stellen (u_0,v_0) an, an denen die betreffende Auflösungsfunktion $v(u)$ bzw. $u(v)$ *existiert*. Geben sie auch die beiden Werte konkret an der Stelle $(u_0,v_0) = (1,1)$ an.

(i) Niveaulinie: implizit definiert durch $g(u,v) = g(u_0,v_0) = \text{const.}$

(i1) Falls gilt $g_v = 0$, d.h. $u_0 = -\frac{3}{2}\,v_0^2$

(i2) Falls gilt $g_u = 0$, d.h. $v_0 = -\frac{3}{2}\,u_0^2$

(i3) Falls gilt $\nabla g(u_0,v_0) = 0$, d.h. an den stationären Punkten (siehe b))

(Niveaulinie entartet zu singulärem Punkt)

(ii) Implizit differenzieren:

$$g_v \neq 0\colon\; 0 = \tfrac{d}{du}\,g(u,v(u)) = g_u + g_v\,v' \quad \Rightarrow \quad v'(u) = -g_u/g_v$$
$$g_u \neq 0\colon\; 0 = \tfrac{d}{dv}\,g(u(v),v) = g_u\,u' + g_v \quad \Rightarrow \quad u'(v) = -g_v/g_u$$

mit g_u, g_v aus a). An $(u_0,v_0) = (1,1)$: $\quad v'(1) = -1,\; u'(1) = -1$

• **Aufgabe 2.** Gegeben sei das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\boxed{g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x-2\,y+3\,z \\ x+y^3+z^2 \end{pmatrix}}$

a) (i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von g. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die Linearisierung von g an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = (0,1,1)$ explizit in Form eines Vektorfeldes $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an.

(i)

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3\,y^2 & 2\,z \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T(x,y,z) = g(x_0,y_0,z_0) + J(x_0,y_0,z_0)\cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2\,y+3\,z \\ x+3\,y+2\,z-3 \end{pmatrix}$$

(mit $T_1(x,y,z) = g_1(x,y,z)$, da $g_1(x,y,z)$ linear).

b) Lässt sich die durch $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ impliziert definierte Kurve im $\mathbb{R}^3$ in einer Umgebung der Stelle[1] $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ nach y parametrisieren? (Begründung angeben!) *b): 2 P.*

Betrachte partielle Jacobi-Matrix an der Stelle $(0,0,0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial(x,z)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ regulär}$$

$\Rightarrow$ lokal auflösbar nach x, z: $x = x(y)$, $z = z(y)$.

c) Schreiben Sie die Bedingungsgleichungen dafür an, dass – bei Variation des Punktes (x,y,z) entlang der gemäß b) definierten Kurve – die y-Koordinate ein lokales Extremum aufweist. *c): 2.5 P.*

Mit der Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \varphi(x,y,z) + \lambda_1\, g_1(x,y,z) + \lambda_2\, g_2(x,y,z) \\ &= y + \lambda_1\,(-x-2\,y+3\,z) + \lambda_2\,(x+y^3+z^2) \end{aligned}$$

lautet das zugehörige Lagrange-System:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 1 - 2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2\, y^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 3\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2\, z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= -x-2\,y+3\,z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= x+y^3+z^2 = 0 \end{aligned}$$

[1] Es gilt $g(0,0,0) = (0,0)$.

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei das lineare Funktional $g\colon (C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{g(u) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, \cos t\, dt}$$

a) Zeigen Sie: g ist stetig. (Schreiben Sie ihren Beweis in das Kästchen.) *a): 2.5 P.*

Es gilt

$$|g(u)| = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u(t)\, \cos t\, dt \right| \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \max_{\tau \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |u(\tau)| \cdot \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt \cdot \|u\|_\infty = 2\,\|u\|_\infty$$

Daher ist g beschränkt: $|g(u)| \le K\,\|u\|_\infty$, mit $K = 2$.

$\Rightarrow$ g ist stetig.

b) Sei g wie unter a) definiert. *b): 3.5 P.*

Geben Sie für beliebiges $u \in C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eine Abschätzung der Gestalt

$$|g(U)| \le L\,\|u\|_\infty$$

an, wobei $U \in C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ definiert ist als

$$U(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} u(\tau)\, d\tau\,.$$

Wie lautet die Konstante L?

Mit a) gilt $(K = 2)$

$$\begin{aligned} |g(U)| \le K\,\|U\|_\infty &= K \max_{t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |U(t)| \\ &\le K \max_{t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} u(\tau)\, d\tau \right| \\ &\le K \max_{t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} |u(\tau)|\, d\tau \\ &\le K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |u(\tau)|\, d\tau \le \pi\, K\,\|u\|_\infty\,, \end{aligned}$$

also $L = \pi K = 2\pi$. (Es gilt auch $|g(U)| \le K\,\|u\|_1$.)

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2012

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 1 (DI, 08.05.2012) / Gruppe 4 ***(mit Lösung)***

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\boxed{f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3\,x + 2\,y - z \\ x^2 - y + z^3 \end{pmatrix}}$

a) (i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die Linearisierung von f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$ explizit in Form eines Vektorfeldes $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an.

(i)

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2\,x & -1 & 3\,z^2 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + J(x_0,y_0,z_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,x + 2\,y - z \\ 2\,x - y - 1 \end{pmatrix}$$

(mit $T_1(x,y,z) = f_1(x,y,z)$, da $f_1(x,y,z)$ linear).

b) Lässt sich die durch $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ impliziert definierte Kurve im $\mathbb{R}^3$ in einer Umgebung der Stelle[1] $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ nach z parametrisieren? (Begründung angeben!) *b): 2 P.*

Betrachte partielle Jacobi-Matrix an der Stelle $(0,0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2\,x & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ regulär}$$

$\Rightarrow$ lokal auflösbar nach x, y: $x = x(z)$, $y = y(z)$.

c) Schreiben Sie die Bedingungsgleichungen dafür an, dass – bei Variation des Punktes (x,y,z) entlang der gemäß b) definierten Kurve – die y-Koordinate ein lokales Extremum aufweist. *c): 2.5 P.*

Mit der Lagrange-Funktion

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \varphi(x,y,z) + \lambda_1 f_1(x,y,z) + \lambda_2 f_2(x,y,z)$$
$$= y + \lambda_1\,(-3\,x + 2\,y - z) + \lambda_2\,(x^2 - y + z^3)$$

lautet das zugehörige Lagrange-System:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2\,x = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\,\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\lambda_1 + 3\,\lambda_2\,z^2 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -3\,x + 2\,y - z = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x^2 - y + z^3 = 0$$

[1] Es gilt $f(0,0,0) = (0,0)$.

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(u,v) = 2\,u^3 + 6\,uv + 2\,v^3 + 3}$

a) (i) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. *a): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung an der Stelle $(0,0)$ an.

(iii) Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene von f an der Stelle $(0,0)$ an.

(i)
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6\,u^2 + 6\,v \\ 6\,u + 6\,v^2 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 12\,u & 6 \\ 6 & 12\,v \end{pmatrix}$$

(ii)
$$f(u,v) = f(0,0) + \nabla f(0,0) + \tfrac{1}{2}\,(u,v)\cdot H(0,0)\cdot(u,v) = 3 + 6\,uv$$

(Dies liest man auch direkt aus der Definition von f ab.)

(iii) $T(u,v) = 3$

b) (i) Geben Sie alle stationären Punkte von f samt ihrem Typ an. *b): 1.5 P.*

(ii) Geben Sie v so an, dass $(1,v)$ ein parabolischer Punkt von f ist.

(i) $(u,v) = (0,0)$, Sattelpunkt (H indefinit)

$(u,v) = (-1,-1)$, lokales Maximum (H negativ definit)

(ii) Es muss gelten $\det H(1,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 1/4$

c) (i) Für welche $(u,v) = (u_0,v_0)$ lässt sich die durch (u_0,v_0) verlaufende Niveaulinie von f

(i1) *nicht* lokal nach u parametrisieren ($v = v(u)$), bzw. *c): 3 P.*

(i2) *nicht* lokal nach v parametrisieren ($u = u(v)$)?

(i3) *weder* nach u *noch* nach v? Was passiert an diesen Stellen?

(ii) Geben Sie explizite Formelausdrücke für die Ableitungen $v'(u)$ bzw. $u'(v)$ an beliebigen Stellen (u_0,v_0) an, an denen die betreffende Auflösungsfunktion $v(u)$ bzw. $u(v)$ existiert. Geben sie auch die beiden Werte konkret an der Stelle $(u_0,v_0) = (1,1)$ an.

(i) Niveaulinie: implizit definiert durch $f(u,v) = f(u_0,v_0) = \text{const.}$

(i1) Falls gilt $f_v = 0$, d.h. $u_0 = -\,v_0^2$

(i2) Falls gilt $f_u = 0$, d.h. $v_0 = -\,u_0^2$

(i3) Falls gilt $\nabla f(u_0,v_0) = 0$, d.h. an den stationären Punkten (siehe b))

(Niveaulinie entartet zu singulärem Punkt)

(ii) Implizit differenzieren:

$$f_v \neq 0:\quad 0 = \tfrac{d}{du}\,f(u,v(u)) = f_u + f_v\,v' \quad \Rightarrow \quad v'(u) = -f_u/f_v$$
$$f_u \neq 0:\quad 0 = \tfrac{d}{dv}\,f(u(v),v) = f_u\,u' + f_v \quad \Rightarrow \quad u'(v) = -f_v/f_u$$

mit f_u, f_v aus a). An $(u_0,v_0) = (1,1)$: $\quad v'(1) = -1,\ u'(1) = -1$

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei das lineare Funktional $f\colon (C[1,e], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(u) = \int_1^e u(t)\, t^{-1}\, dt}$$

a) Zeigen Sie: f ist stetig. (Schreiben Sie ihren Beweis in das Kästchen.) *a): 2.5 P.*

Es gilt

$$|f(u)| = \left| \int_1^e u(t)\, t^{-1}\, dt \right| \le \int_1^e \max_{\tau \in [1,e]} |u(\tau)| \cdot t^{-1}\, dt = \int_1^e t^{-1}\, dt \cdot \|u\|_\infty = \|u\|_\infty$$

Daher ist f beschränkt: $|f(u)| \le K\, \|u\|_\infty$, mit $K = 1$.

$\Rightarrow$ f ist stetig.

b) Sei f wie unter a) definiert. *b): 3.5 P.*

Geben Sie für beliebiges $u \in C[1,e]$ eine Abschätzung der Gestalt

$$|f(U)| \le L\, \|u\|_\infty$$

an, wobei $U \in C[1,e]$ definiert ist als

$$U(t) = \int_1^t u(\tau)\, d\tau\,.$$

Wie lautet die Konstante L?

Mit a) gilt $(K = 1)$

$$\begin{aligned} |f(U)| &\le K\, \|U\|_\infty = K \max_{t \in [1,e]} |U(t)| \\ &\le K \max_{t \in [1,e]} \left| \int_1^t u(\tau)\, d\tau \right| \\ &\le K \max_{t \in [1,e]} \int_1^t |u(\tau)|\, d\tau \\ &\le K \int_1^e |u(\tau)|\, d\tau \le (e-1)\, K\, \|u\|_\infty\,, \end{aligned}$$

also $L = (e-1)K = (e-1)$. (Es gilt auch $|f(U)| \le K\, \|u\|_1$.)