Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller TU Wien
SS 2012

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 2 (FR, 15.06.2012) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden* Kästchen *eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen ,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y,z) = x + 2y + z + 5}$

a) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *a): 2 P.*

$F = x + 2y + z + 5 + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$
$\partial_x F = 1 - 2\lambda x \to x = \frac{1}{2\lambda}$
$\partial_y F = 2 - 2\lambda y \to y = \frac{1}{\lambda}$
$\partial_z F = 1 - 2\lambda z \to z = \frac{1}{2\lambda}$
$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2}(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2\lambda^2} \to \frac{1}{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ und
$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung: $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. *b): 2.5 P.*

Inneres der Kreisscheibe:
$\bar{f}(x,y) = f(x,y,z=0)$
$\nabla\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, somit existiert kein Extremum
Rand der Kreisscheibe:
$F = x + 2y + 5 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$
$\partial_x F = 1 - 2\lambda x = 0 \to x = \frac{1}{2\lambda}$
$\partial_y F = 2 - 2\lambda y = 0 \to y = \frac{1}{\lambda}$
$1 = x^2 + y^2 = \frac{1}{\lambda^2}(\frac{1}{4} + 1) = \frac{5}{4\lambda^2} \to \frac{1}{\lambda} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$
$x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $z_3 = 0$ und
$x_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y_4 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $z_4 = 0$

c) Geben Sie alle Extremwerte der Funktion f innerhalb des Volumens (incl. Rand) der oberen Halbkugel an, also: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.
Überlegen Sie, wie Sie sich Rechenaufwand ersparen können. *c): 1.5 P.*

Inneres der Halbkugel:
$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, somit existiert kein Extremum
Rand der Halbkugel:
Siehe (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3) und (x_4, y_4, z_4) aus den vorherigen Beispielen.

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Integralgleichung: $\boxed{x(t) = e + \int_0^t e^{-2s} x(s) ds, \ t \geq 0}$

a) Zeigen Sie, dass die Integralgleichung eine eindeutige Lösung besitzt. *a): 2 P.*

$|| \int_0^t e^{-2s}(x_1(s) - x_2(s))ds||_\infty \leq || \int_0^t e^{-2s} ds||_\infty ||(x_1 - x_2)||_\infty =$

$= -\frac{1}{2} e^{-2s}|_{s=0}^{\infty} ||(x_1 - x_2)||_\infty = \frac{1}{2}||(x_1 - x_2)||_\infty$

b) Berechnen Sie x_1 und x_2 der Picarditeration, mit dem Startwert $x_0 = e$. *b): 2 P.*

$x_1 = e + \int_0^t e^{-2s} e ds = e - e\frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) = \frac{3e}{2} - \frac{e}{2} e^{-2t}$

$x_2 = e + \int_0^t e^{-2s}(\frac{3e}{2} - \frac{e}{2}e^{-2s})ds = e - \frac{3e}{2}\frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) + \frac{e}{2}\frac{1}{4}(e^{-4t} - 1) = \frac{13e}{8} - \frac{3e}{4}e^{-2t} + \frac{e}{8}e^{-4t}$

c) Geben Sie ein zur Integralgleichung equivalentes Differentialgleichungsproblem an (incl. Anfangsbedingung). *c): 0.5 P.*

$x'(t) = e^{-2t} x(t), \ x(t = 0) = e$

d) Wie lautet die exakte Lösung der Integralgleichung? *d): 1.5 P.*

$x'(t) = e^{-2t} x(t) \to \frac{x'}{x} = e^{-2t} \to \ln x = -\frac{1}{2} e^{-2t} + C \to x(t) = e^C e^{-\frac{1}{2} e^{-2t}}$

$x(t = 0) = e^C e^{-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} e \to e^C = e^{\frac{3}{2}}$

- **Aufgabe 3.**

a) Entwickeln Sie die Funktion: $\boxed{g = \begin{cases} 1, \ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, \ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}}$

in eine 2π-periodische Sinusreihe. Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten?
Überlegen Sie sich wie Sie die Funktion außerhalb des Definitionsbereiches erweitern müssen. *a): 2 P.*

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(x) \sin(kx) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(kx) = -\frac{2}{k\pi} \cos(kx)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k\pi}(1 - \cos(\frac{k\pi}{2}))$

b) Entwickeln Sie die Funktion: $\boxed{h = \begin{cases} -1, \ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, \ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}}$

in eine 2π-periodische Cosinusreihe. Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten? *b): 2 P.*

$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(x) \cos(kx) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \cos(kx) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx) + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(kx) =$
$= \frac{2}{k\pi}(-\sin(\frac{k\pi}{2}) + \sin(k\pi) - \sin(\frac{k\pi}{2})) = -\frac{4}{k\pi} \sin(\frac{k\pi}{2})$

$a_0 = 0$

c) Geben Sie die Fourierreihe der Funktion: $\boxed{f = \begin{cases} 1, \ x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ -3, \ x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 1, \ x \in [0, \pi] \end{cases}}$ an.

Überlegen Sie, wie Sie die Ergebnisse aus a) und b) hier nutzen können um sich Rechenaufwand zu ersparen. *c): 1.5 P.*

$f(x) = 2\bar{g}(x) - \bar{h}(x)$, wobei $\bar{g}$ und $\bar{h}$ die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ungerade bzw. gerade erweitete Funtion von g bzw. h seien. Daraus folgt:

$a_0 = 0, a_k = -\frac{4}{k\pi} \sin(\frac{k\pi}{2}), b_k = \frac{4}{k\pi}(1 - \cos(\frac{k\pi}{2}))$

d) Wo konvergiert die Fourierreihe der unter c) definierten Funktion f nicht gegen den Funktionswert? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen? *d): 0.5 P.*

An den Stellen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 konvergiert die Fourierreihe gegen -1.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

TU Wien
SS 2012

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 2 (FR, 15.06.2012) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden Kästchen ***eingetragenen Antworten.***

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

•

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y,z) = 2x - y + z + 3}$

a) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *a): 2 P.*

$F = 2x - y + z + 3 + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$
$\partial_x F = 2 - 2\lambda x = 0 \to x = \frac{1}{\lambda}$
$\partial_y F = -1 - 2\lambda y = 0 \to y = -\frac{1}{2\lambda}$
$\partial_z F = 1 - 2\lambda z = 0 \to z = \frac{1}{2\lambda}$
$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{2\lambda^2} \to \frac{1}{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ und
$x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung: $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 0$. *b): 2.5 P.*

Inneres der Kreisscheibe:
$\bar{f}(x,z) = f(x, y = 0, z)$
$\nabla \bar{f}(x,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit existiert kein Extremum
Rand der Kreisscheibe:
$F = 2x + z + 3 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$
$\partial_x F = 2 - 2\lambda x = 0 \to x = \frac{1}{\lambda}$
$\partial_z F = 1 - 2\lambda z = 0 \to z = \frac{1}{2\lambda}$
$1 = x^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2}(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4\lambda^2} \to \frac{1}{\lambda} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$
$x_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y_3 = 0$, $z_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und
$x_4 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y_4 = 0$, $z_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) Geben Sie alle Extremwerte der Funktion f innerhalb des Volumens (incl. Rand) der hinteren Halbkugel an, also: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$.
Überlegen Sie, wie Sie sich Rechenaufwand ersparen können. *c): 1.5 P.*

Inneres der Halbkugel:
$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit existiert kein Extremum
Rand der Halbkugel:
Siehe (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3) und (x_4, y_4, z_4) aus den vorherigen Beispielen.

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Integralgleichung: $\boxed{x(t) = \frac{e}{3} + \int_0^t e^{-3s} x(s) ds, \ t \geq 0}$

a) Zeigen Sie, dass die Integralgleichung eine eindeutige Lösung besitzt. *a): 2 P.*

$|| \int_0^t e^{-3s}(x_1(s) - x_2(s))ds||_\infty \leq || \int_0^t e^{-3s} ds||_\infty ||(x_1 - x_2)||_\infty =$

$= -\frac{1}{3}e^{-3s}|_{s=0}^{\infty} ||(x_1 - x_2)||_\infty = \frac{1}{3}||(x_1 - x_2)||_\infty$

b) Berechnen Sie x_1 und x_2 der Picarditeration, mit dem Startwert $x_0 = \frac{e}{3}$. *b): 2 P.*

$x_1 = \frac{e}{3} + \int_0^t e^{-3s}\frac{e}{3} ds = \frac{e}{3} - \frac{e}{3}\frac{1}{3}(e^{-3t} - 1) = \frac{4e}{9} - \frac{e}{9}e^{-3t}$

$x_2 = \frac{e}{3} + \int_0^t e^{-3s}(\frac{4e}{9} - \frac{e}{9}e^{-3s})ds = \frac{e}{3} - \frac{4e}{9}\frac{1}{3}(e^{-3t} - 1) + \frac{e}{9}\frac{1}{6}(e^{-6t} - 1) = \frac{41e}{45} - \frac{4e}{27}e^{-3t} + \frac{e}{54}e^{-6t}$

c) Geben Sie ein zur Integralgleichung equivalentes Differentialgleichungsproblem an (incl. Anfangsbedingung). *c): 0.5 P.*

$x'(t) = e^{-3t}x(t), \ x(t = 0) = \frac{e}{3}$

d) Wie lautet die exakte Lösung der Integralgleichung? *d): 1.5 P.*

$x'(t) = e^{-3t}x(t) \rightarrow \frac{x'}{x} = e^{-3t} \rightarrow \ln x = -\frac{1}{3}e^{-3t} + C \rightarrow x(t) = e^C e^{-\frac{1}{3}e^{-3t}}$

$x(t = 0) = e^C e^{-\frac{1}{3}} \stackrel{!}{=} \frac{e}{3} \rightarrow e^C = \frac{e^{\frac{4}{3}}}{3}$

- **Aufgabe 3.**

a) Entwickeln Sie die Funktion: $\boxed{g = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}}$

in eine 2π-periodische Sinusreihe. Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten?
Überlegen Sie sich wie Sie die Funktion außerhalb des Definitionsbereiches erweitern müssen. *a): 2 P.*

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{g}(x)\sin(kx) = -\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(kx) = \frac{2}{k\pi}\cos(kx)|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{k\pi}(\cos(k\pi) - \cos(\frac{k\pi}{2}))$

b) Entwickeln Sie die Funktion: $\boxed{h = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 3, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}}$

in eine 2π-periodische Cosinusreihe (incl. einer Konstanten). Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten? *b): 2 P.*

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{h}(x)\cos(kx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}h(x)\cos(kx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(kx) + 3\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(kx) =$
$= \frac{2}{k\pi}(\sin(\frac{k\pi}{2}) + 3\sin(k\pi) - 3\sin(\frac{k\pi}{2})) = -\frac{4}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2})$

$a_0 = 2$

c) Geben Sie die Fourierreihe der Funktion: $\boxed{f = \begin{cases} 5, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ 1, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}}$ an.

Überlegen Sie, wie Sie die Ergebnisse aus a) und b) hier nutzen können um sich Rechenaufwand zu ersparen. *c): 1.5 P.*

$f(x) = 2\bar{g}(x) + \bar{h}(x)$, wobei $\bar{g}$ und $\bar{h}$ die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ungerade bzw. gerade erweitete Funtion von g bzw. h seien. Daraus folgt:

$a_0 = 2, a_k = -\frac{4}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}), b_k = \frac{4}{k\pi}(\cos(k\pi) - \cos(\frac{k\pi}{2}))$

d) Wo konvergiert die Fourierreihe der unter c) definierten Funktion f nicht gegen den Funktionswert? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen? *d): 0.5 P.*

An den Stellen $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ und π konvergiert die Fourierreihe gegen 3.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, E. Weinmüller

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 2 (FR, 15.06.2012) *(mit Lösung)*

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	gesamt
Punkte			maximal 18

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\text{Kästchen}}$ ***eingetragenen Antworten.***

***Machen Sie sich zunächst Notizen**,*
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y,z) = -x + y + 2z + 1}$

a) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *a): 2 P.*

$$F = -x + y + 2z + 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$
$$\partial_x F = -1 - 2\lambda x = 0 \to x = -\frac{1}{2\lambda}$$
$$\partial_y F = 1 - 2\lambda y = 0 \to y = \frac{1}{2\lambda}$$
$$\partial_z F = 2 - 2\lambda z = 0 \to z = \frac{1}{\lambda}$$
$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{2\lambda^2} \to \frac{1}{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und
$x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $z_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

b) Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion f unter der Nebenbedingung: $y^2 + z^2 \leq 1$, $x = 0$. *b): 2.5 P.*

Inneres der Kreisscheibe:
$\bar{f}(y,z) = f(x = 0, y, z)$
$\nabla \bar{f}(y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit existiert kein Extremum
Rand der Kreisscheibe:
$$F = y + 2z + 1 + \lambda(1 - y^2 - z^2)$$
$$\partial_y F = 1 - 2\lambda y = 0 \to y = \frac{1}{2\lambda}$$
$$\partial_z F = 2 - 2\lambda z = 0 \to z = \frac{1}{\lambda}$$
$$1 = y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4\lambda^2} \to \frac{1}{\lambda} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$x_3 = 0$, $y_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $z_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und
$x_4 = 0$, $y_4 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $z_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) Geben Sie alle Extremwerte der Funktion f innerhalb des Volumens (incl. Rand) der linken Halbkugel an, also: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \leq 0$.
Überlegen Sie, wie Sie sich Rechenaufwand ersparen können. *c): 1.5 P.*

Inneres der Halbkugel:
$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit existiert kein Extremum
Rand der Halbkugel:
Siehe (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3) und (x_4, y_4, z_4) aus den vorherigen Beispielen.

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Integralgleichung: $\boxed{x(t) = \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}x(s)ds,\ t \geq 0}$

a) Zeigen Sie, dass die Integralgleichung eine eindeutige Lösung besitzt. *a): 2 P.*

$||\frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}(x_1(s) - x_2(s))ds||_\infty \leq ||\frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}ds||_\infty||(x_1 - x_2)||_\infty =$

$= -\frac{1}{2}e^{-s}|_{s=0}^{\infty}||(x_1 - x_2)||_\infty = \frac{1}{2}||(x_1 - x_2)||_\infty$

b) Berechnen Sie x_1 und x_2 der Picarditeration, mit dem Startwert $x_0 = \frac{e}{2}$. *b): 2 P.*

$x_1 = \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}\frac{e}{2}ds = \frac{e}{2} - \frac{e}{4}(e^{-t} - 1) = \frac{3e}{4} - \frac{e}{4}e^{-t}$

$x_2 = \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}(\frac{3e}{4} - \frac{e}{4}e^{-s})ds = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}\frac{3e}{4}(e^{-t} - 1) + \frac{1}{4}\frac{e}{4}(e^{-2t} - 1) = \frac{13e}{16} - \frac{3e}{8}e^{-t} + \frac{e}{16}e^{-2t}$

c) Geben Sie ein zur Integralgleichung equivalentes Differentialgleichungsproblem an (incl. Anfangsbedingung). *c): 0.5 P.*

$x'(t) = \frac{e^{-t}}{2}x(t),\ x(t = 0) = \frac{e}{2}$

d) Wie lautet die exakte Lösung der Integralgleichung? *d): 1.5 P.*

$x'(t) = \frac{e^{-t}}{2}x(t) \to \frac{x'}{x} = \frac{e^{-t}}{2} \to \ln x = -\frac{e^{-t}}{2} + C \to x(t) = e^C e^{-\frac{e^{-t}}{2}}$

$x(t = 0) = e^C e^{-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} \frac{e}{2} \to e^C = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$

- **Aufgabe 3.**

a) Entwickeln Sie die Funktion: $\boxed{g = \begin{cases} -1, \, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 1, \, x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}}$

in eine 2π-periodische Sinusreihe. Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten?
Überlegen Sie sich wie Sie die Funktion außerhalb des Definitionsbereiches erweitern müssen. *a): 2 P.*

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(x)\sin(kx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx) =$
$= \frac{2}{\pi}(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(kx) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(kx)) = \frac{2}{k\pi}(\cos(kx)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos(kx)|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}) = \frac{2}{k\pi}(-1 + 2\cos(\frac{k\pi}{2}) - \cos(k\pi))$

b) Entwickeln Sie die Funktion: $\boxed{h = \begin{cases} 1, \, x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, \, x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}}$

in eine 2π-periodische Cosinusreihe (incl. einer Konstanten). Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten? *b): 2 P.*

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{h}(x)\cos(kx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx) = \frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2})$

$a_0 = \frac{1}{2}$

c) Geben Sie die Fourierreihe der Funktion: $\boxed{f = \begin{cases} -1, \, x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ 3, \, x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ 1, \, x \in [0, \pi] \end{cases}}$ an.

Überlegen Sie, wie Sie die Ergebnisse aus a) und b) hier nutzen können um sich Rechenaufwand zu ersparen. *c): 1.5 P.*

$f(x) = \bar{g}(x) + 2\bar{h}(x)$, wobei $\bar{g}$ und $\bar{h}$ die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ungerade bzw. gerade erweitete Funtion von g bzw. h seien. Daraus folgt:

$a_0 = 1, a_k = \frac{4}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}), b_k = \frac{2}{k\pi}(-1 + 2\cos(\frac{k\pi}{2}) - \cos(k\pi))$

d) Wo konvergiert die Fourierreihe der unter c) definierten Funktion f nicht gegen den Funktionswert? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen? *d): 0.5 P.*

An den Stellen $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ und π konvergiert die Fourierreihe gegen 0, 1 bzw. 2.