UE 1 / Aufgabe 1

- Für die Abstandsmessung im $\mathbb{R}^n$ verwendet man den Begriff der **Norm** von Vektoren. Eine Norm $\|x\|$ ist eine Formel dafür, die 'Größe' von Vektoren (Punkten) zu messen, und dann misst die Norm des Differenzvektors $\|x-y\|$ den Abstand zwischen x und y. Eine natürliche (für $n \leq 3$ anschauliche naheliegende) Norm ist die Euklidische Norm,

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

Nun beschreiben aber z.B. auch die Ausdrücke

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \qquad \text{oder} \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1\ldots n} |x_i|\,,$$

die Größe von Vektoren in sinnvoller Weise. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind zu $\|\cdot\|_2$ alternative Normen.
Wir betrachten jetzt nur den Fall $n=2$:

a) Charakterisieren Sie obige drei Normen durch Ihre 'Norm-Einheitskreise', das sind die durch $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ definierten Kurven ($\rightarrow$ Skizze).

b) Verwenden Sie diese Skizze dazu, um zu (geometrisch anschaulich) zu argumentieren:

   Wenn immer man zwei beliebige der obigen drei Normen hernimmt, nennen wir sie $\|x\|_\alpha$ und $\|x\|_\beta$, dann gibt es eine Konstante $C_{\alpha,\beta}$ so dass gilt

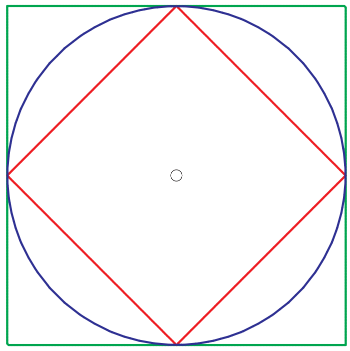
$$\|x\|_\alpha \leq C_{\alpha,\beta}\,\|x\|_\beta$$

   für beliebige $x \in \mathbb{R}^2$. Man sagt: Alle diese Normen sind **äquivalent**, und analoge Aussagen gelten im $\mathbb{R}^n$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von b):

   Die Konvergenz einer Folge (x_k) im $\mathbb{R}^2$ (Definition 1.6) ist unabhängig davon, welche dieser Normen man zugrunde legt.

$\longrightarrow$



a) Skizze zeigt die Norm-Einheitskreise

$$\{x : \|x\| = 1\} \qquad \{x : \|x\|_1 = 1\} \qquad \{x : \|x\|_\infty = 1\}$$

b) Anschaulich: Jedes ○ ◇, □ hat in einem etwas größeren ○ ◇, □ Platz, und umgekehrt.

Genauer: Es gilt z.B.

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le \sqrt{2\,\max\{|x_1|^2, |x_2|^2\}} \\
&= \sqrt{2}\,\max\{|x_1|, |x_2|\} = \sqrt{2}\,\|x\|_\infty\,, \\
\|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|\} = \sqrt{(\max\{|x_1|, |x_2|\})^2} \\
&\le \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|x\|_2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\|x\|_2 \le C\,\|x\|_\infty \quad \text{und} \quad \|x\|_\infty \le C\,\|x\|_2$$

mit gewissen Konstanten C (unabh. von x). Analog für $\|x\|_1$.

c) Z.B.: Aus Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$,

$$\forall\,\varepsilon > 0 : \ \exists\,N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \|x_n - x^*\|_\infty < \varepsilon \quad \forall\,n \ge N(\varepsilon)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\ldots \quad & \|x_n - x^*\|_2 < \sqrt{2}\,\varepsilon \quad \forall\,n \ge N(\varepsilon), \quad \text{d.h.} \\
\ldots \quad & \|x_n - x^*\|_2 < \varepsilon \quad \forall\,n \ge M(\varepsilon) := N(\varepsilon/\sqrt{2})\,.
\end{aligned}$$

$\checkmark\square$

-

a) Zeigen Sie, dass für jede der drei in Aufgabe 1 betrachteten Normen die *Dreiecksungleichung* gilt, d.h.

$$\|x+y\| \;\le\; \|x\| + \|y\| \quad \text{für alle} \;\; x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Für die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist das anschaulich klar – aber wie funktioniert der allgemeine Beweis?)

b) Aufgrund des Bestehens der Dreiecksungleichung ist die Erweiterung vieler Aussagen aus dem eindimensionalen Fall ($n = 1$, 'Analysis I', mit $\|x\| = |x|$) auf den allgemeinen Fall problemlos möglich.

Beispiel: Definieren Sie den Begriff einer *Cauchyfolge* im $\mathbb{R}^n$ und zeigen Sie: *Jede konvergente Folge* (x_k) *im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Cauchyfolge.*

---

a) Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$:

- $\|x\|_2 = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}$ ($x \cdot y = \sum_i x_i\, y_i \;=\;$ inneres Produkt):

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) \\ &= (x\cdot x) + 2\,(x\cdot y) + (y\cdot y) \\ &\le \|x\|_2^2 + 2\,|x\cdot y| + \|y\|_2^2 \\ &\le \|x\|_2^2 + 2\,\|x\|_2\,\|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i$: Aus $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|$ folgt

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^n \big(|x_i| + |y_i|\big) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \qquad \checkmark\end{aligned}$$

- $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1\ldots n} x_i$: Aus $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i|$ folgt

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= \max_{i=1\ldots n} |x_i + y_i| \le \max_{i=1\ldots n} \big(|x_i| + |y_i|\big) \\ &\le \max_{i=1\ldots n} |x_i| + \max_{i=1\ldots n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Anmerkung: Die weiteren für eine *Norm* charakteristischen Eigenschaften sind

– Homogenität: $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

– $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$, d.h. genau der Nullvektor hat Norm 0.

Diese (zu $|\cdot|$ analogen) Eigenschaften sind für $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ offensichtlich erfüllt.

b) [vgl. Aufgabe 1]: Der Begriff der Konvergenz und auch der Cauchyfolge ist von der verwendeten Norm im $\mathbb{R}^n$ unabhängig ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, oder auch *irgendeine* andere Norm im $\mathbb{R}^n$). Für eine Folge $(x_k) \to x^*$ gilt dann

$$\|x_k - x_\ell\| \le \|x_k - x^*\| + \|x_\ell - x^*\| \le 2\,\varepsilon \quad \forall\, k, \ell \ge N(\varepsilon)$$

für beliebige $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon)$ aus der Konvergenzeigenschaft.

$\Rightarrow$ (x_k) ist eine Cauchyfolge. Beweis völlig analog zum Fall $n = 1$ (man benötigt nur die Dreiecksungleichung).

$\square$

- Wenn eine Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 eine Sprungstelle (Sprung-Unstetigkeit) besitzt, dann stimmt der linksseitige nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert überein.

Im höheren Dimensionen kann es vorkommen, dass der Limes einer Funktion an einer Stelle richtungsabhängig ist. Betrachten Sie z.B. die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) \;:=\; \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion an der Stelle $(x_0,y_0)=(0,0)$ nicht stetig fortsetzbar ist, weil der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existiert. Um dies zu argumentieren, betrachten Sie den Limes von $f(x,y)$ entlang einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt. Wie ist das Verhalten dieses Limes in Abhängigkeit von der Orientierung dieser Geraden?

Betrachte Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$, $c, s = \cos\alpha,\, \sin\alpha$ $(0 \le \alpha < 2\,\pi)$, und die Gerade

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; t\,v \;=\; \begin{pmatrix} t\,c \\ t\,s \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

mit $(x(0), y(0)) = (0,0)$.

Entlang einer solcher Geraden durch den Nullpunkt ist

$$f(x(t),y(t)) \;=\; \frac{t^2\,c^2 - t^2\,s^2}{t^2\,c^2 + t^2\,s^2} \;=\; \frac{c^2-s^2}{c^2+s^2}$$

$$\;=\; \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \;=\; \cos(2\,\alpha) = \text{const.}$$

abhängig vom Winkel α! Daher auch

$$\lim_{t\to 0} f(x(t),y(t)) \;=\; \cos(2\,\alpha)$$

abhängig von α. $\Rightarrow$ f ist nicht stetig an $(0,0)$. $\square$

- Die Euklidische Norm $\|x\|_2$ kann man als skalarwertige Funktion auffassen, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $f(x) := \|x\|_2$. Für welche $x \in \mathbb{R}^n$ ist diese Funktion (total) differenzierbar (linear approximierbar)? Geben Sie auch ihren Gradienten an.

- Norm $\|x\|_2 =: f(x)$ ist Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = \big(g(x)\big)^{\frac{1}{2}}, \quad g(x) = x \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ total differenzierbar für $x \neq 0$. *Kettenregel* $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\big(g(x)\big)^{-\frac{1}{2}}\, 2\, x_j = \frac{x_j}{\|x\|_2}$$

bzw. gleich direkt für $\nabla \|x\|_2$:

$$\begin{aligned}
\nabla \|x\|_2 &= \frac{d}{dy}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{y=g(x)} \nabla g(x) \\
&= \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}}\Big|_{y=g(x)}\, 2\, x = \frac{x}{\big(g(x)\big)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\|x\|_2}
\end{aligned}$$

Weitere Anwendung der Kettenregel ergibt

- Für $\|x\|_2^k = f^k(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
\nabla \|x\|_2^k &= \frac{d}{dy}\, y^k\Big|_{y=f(x)} \nabla \|x\|_2 \\
&= k\, f^{k-1}(x)\, \nabla \|x\|_2 = k\, \|x\|_2^{k-1} \frac{x}{\|x\|_2} \\
&= k\, \|x\|_2^{k-2}\, x
\end{aligned}$$

(siehe auch Beispiel aus VO, S. 14/15). □

- Untersuchen Sie für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)), \quad f(0,0) := 0$$

die Stetigkeit, Richtungsdifferenzierbarkeit (d.h. die Existenz der Richtungsableitungen) sowie die totale Differenzierbarkeit.

- **Stetigkeit:** Nenner verschwindet für $x^3 + y^2 = 0$, also:

$$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\sqrt{-x^3}\} \cup \{(0,0)\}$$

– Singularität: 2 Zweige mit $x \geq 0$ und $y \geq 0$ bzw. ≤ 0.

– Spezieller Punkt: $(0,0)$: Betrachte Limes aus zwei verschiedenen Richtungen:

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = \lim_{y \to 0} \frac{-y^3}{y^2} = 0 = f(0,0)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \neq f(0,0)$$

$\Rightarrow$ f ist an $(0,0)$ nicht stetig.

– Auf $D(f) \setminus \{(0,0)\}$: f stetig (stetige Komposition).

- **Differenzierbarkeit**: Auf $D(f) \setminus \{(0,0)\}$ existieren die partiellen Ableitungen und sind stetig $\Rightarrow$ total differenzierbar (Fréchet-differenzierbar).

Aber an $(x,y) = (0,0)$: f nicht total differenzierbar, da nicht einmal stetig.

- **Richtungsableitung** $D_v f(0,0)$:

$$\frac{f((0,0)+\varepsilon v) - f(0,0)}{\varepsilon} = \frac{f(\varepsilon v)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^3 v_1^3 - \varepsilon^3 v_2^3}{\varepsilon(\varepsilon^3 v_1^3 + \varepsilon^2 v_2^2)} = \frac{v_1^3 - v_2^3}{\varepsilon v_1^3 + v_2^2}$$

$D_v f(0,0 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ldots)$ existiert für $v_2 \neq 0$.

$\square$

- Die kinetische Energie T eines Objektes mit Masse m und Geschwindigkeit v ist eine Funktion von m und v,

$$T = T(m,v) = \frac{m\,v^2}{2}\,.$$

a) Geben Sie die Linearisierung von $T(m,v)$ an einer Stelle $(m,v) = (m_0,v_0)$ an.

b) Die Masse $m = m_0$ eines Objektes sei nur mit einer Unsicherheit von (max.) $\pm 0.01\,\mathrm{kg}$ bekannt, und die Geschwindigkeit $v = v_0$ nur bis auf $\pm 0.002\,\mathrm{m/s}$. Wie genau lässt sich dann der Wert der kinetischen Energie T bestimmen?

---

a) Gradient von $T = T(m,v)$:

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial m}, \frac{\partial T}{\partial v}\right) = \left(\frac{v^2}{2}, m\,v\right)$$

$\Rightarrow$

$$T(m_0{+}\Delta m, v_0{+}\Delta v) =$$

$$= T(m_0,v_0) + \nabla T(m_0,v_0)\cdot\begin{pmatrix}\Delta m\\ \Delta v\end{pmatrix} + o(\|(\Delta m,\Delta v\|)$$

$$= T(m_0,v_0) + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial m}}_{\text{an }(m_0,v_0)}\Delta m + \underbrace{\frac{\partial T}{\partial v}}_{\text{an }(m_0,v_0)}\Delta m + o(\|(\Delta m,\Delta v\|)$$

$$= \underbrace{\frac{m_0\,v_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2}\Delta m + m_0\,v_0\,\Delta v}_{\text{Linearisierung von } T} + o(\|(\Delta m,\Delta v\|)$$

bzw. in erster Näherung:

$$T(m_0{+}\Delta m, v_0{+}\Delta v) \approx T(m_0,v_0) + \frac{v_0^2}{2}\Delta m + m_0\,v_0\,\Delta v$$

$\longrightarrow$

b) Für irgendein m_0, v_0 und

$$|\Delta m| \leq 0.01 \text{ kg}, \qquad |\Delta v| \leq 0.002 \text{ m/s}$$

folgt

$$|\Delta T| = |T(m_0{+}\Delta m, v_0{+}\Delta v) - T(m_0, v_0)| \leq$$
$$\leq 0.01 \frac{v_0^2}{2} + 0.002\, m_0\, |v_0| \qquad [\text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm}]$$

Z.B.: $m_0 = 3\,\text{kg},\; v_0 = 10\,\text{m/s} \quad (T(m_0, v_0) = 150 \text{ Nm}) \quad \leadsto$

$$|\Delta T| \leq (0.01 \cdot 50 + 0.002 \cdot 3 \cdot 10)\,\text{Nm} = 0.56 \text{ Nm},$$

das sind etwa $0.4\,\%$ von $150\,\text{Nm}$.

$\square$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Ein Skalarfeld $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax \cdot x) + (b \cdot x) + c$$

($\cdot$ symbolisiert das euklidische innere Produkt im $\mathbb{R}^n$).

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$, jedoch nicht indem Sie die partiellen Ableitungen berechnen, sondern indem Sie (geschickterweise) direkt mit Definition 1.11 arbeiten, um ∇f direkt als Vektor darzustellen. (Sie benötigen dazu ein bisschen elementare Lineare Algebra.)

b) Betrachten Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) = 0\}$. In welchem Fall besteht diese Menge nur aus einem einzigen Element, und wie berechnet man dieses?

---

a) Mit

$$\begin{aligned} A(x+h)\cdot(x+h) &= (Ax\cdot x) + (Ax\cdot h) + (Ah\cdot x) + (Ah\cdot h) \\ &= (Ax\cdot x) + ((A+A^T)x\cdot h) + \underbrace{(Ah\cdot h)}_{=o(\|h\|)} \end{aligned}$$

und

$$b\cdot(x+h) = (b\cdot x) + (b\cdot h)$$

folgt mit der Notation $A^S := \frac{1}{2}(A+A^T)$ (symmetrischer Anteil von A):

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}(A(x+h)\cdot(x+h)) + (b\cdot(x+h)) + c \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(Ax\cdot x) + (b\cdot x) + c}_{=f(x)} \\ &\quad + (A^S x\cdot h) + (b\cdot h) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$f(x+h) = f(x) + ((A^S x + b)\cdot h) + o(\|h\|)$$

$\longrightarrow$

Also:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + o(\|h\|), \text{ mit } \nabla f(x) = A^S x + b$$

b) Das lineare Gleichungssystem

$$A^S x + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(x) = 0$$

besitzt eine eindeutige Lösung $x = -\left(A^S\right)^{-1} b$, falls

$$A^S = \tfrac{1}{2}\left(A + A^T\right) \text{ regulär.}$$

Anmerkung 1: $f(x)$ ist ein multivariates Polynom vom Grad 2 in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Die gegebene Gestalt von f,

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax \cdot x) + (b \cdot x) + c$$

(quadratischer + linearer + konstanter Anteil), entspricht genau der (exakten) Taylor-Entwicklung an 0, mit

$$\nabla f(0) = b\,, \quad H(f) \equiv A \text{ (konstante Hesse-Matrix } H = A).$$

Anmerkung 2: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$(Ax) \cdot x = x \cdot (A^T x) = (A^T x \cdot x)$$

$\Rightarrow$

$$(Ax) \cdot x = (A^S x) \cdot x\,,$$

d.h. nur der *symmetrische* Anteil von A hat einen Einfluss auf die quadratische Form $(Ax) \cdot x$. Der symmetrische Fall ist also bereits der allgemeine Fall einer quadratischen Form. Mit symmetrischem $A = A^T$ ist dann

$$\nabla f(x) = Ax + b\,,$$

d.h. die stationären Punkte von f sind genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax + b = 0$.

$\longrightarrow$

Beispiel: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist

$$(x, y)^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 5\,x\,y + 4\,y^2 = (x, y)^T A^S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der (indefiniten) symmetrischen Matrix

$$A^S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

□

- Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *symmetrische* Matrix. Wir betrachten die skalarwertige Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\,((Ax)\cdot x)$ (inneres Produkt), analog wie in Aufgabe 7.

Sei x ein *Eigenvektor* von A zu einem einfachen Eigenwert λ.

a) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_v f(x)$.

b) Für welche $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $D_v f(x) = 0$?

Vorbemerkung: Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar, mit reellem Spektrum (Eigenwerten) und orthogonalem Eigensystem (siehe 'Lineare Algebra').

a) $f(x)$ ist eine quadratische Form, siehe Aufgabe 7, mit

$$\nabla f(x) \;=\; A\,x\,.$$

- Richtungsableitung in Richtung v $(\|v\|_2 = 1)$:

Nach Satz 1.2 ist

$$D_v f(x) \;=\; \nabla f(x)\cdot v \;=\; (A\,x)\cdot v\,.$$

Für $x =$ Eigenvektor von A zu Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt speziell:

$$D_v f(x) \;=\; (\lambda x)\cdot v \;=\; \lambda\,(x\cdot v)\,.$$

b) Es gilt

$$D_v f(x) \;=\; \lambda\,(x\cdot v) \;=\; 0 \quad \text{für} \quad v \perp x\,,$$

$\Rightarrow$ die Tangente an die Kontourlinie an der Stelle x steht auf x orthogonal. [Skizze / Tafel]

Anmerkung: Umgekehrt gilt für einen normierten Eigenvektor x $(\|x\|_2 = 1)$:

$$D_x f(x) \;=\; (\lambda x)\cdot x \;=\; \lambda \;=\; \text{Eigenwert zu } x\,.$$

$\square$

- Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J(x,y)$ des Vektorfeldes

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^4 \\ x^2\, y^2 \end{pmatrix}$$

Für welche (x,y) ist $J(x,y)$ regulär?

-

$$J(x,y) = Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x & 4\,y^3 \\ 2\,xy^2 & 2\,x^2 y \end{pmatrix}$$

mit

$$\det J(x,y) = 4\,x^3\,y - 8\,x\,y^5 = 4\,xy\,(x^2 - 2\,y^4)$$

- Nullstellen von $\det J$:

(i) $x\,y = 0\,,\quad$ d.h. $\quad x = 0$ oder $y = 0 \quad$ (x-Achse, y-Achse),

oder

(ii) $x^2 - 2\,y^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}\,y^2 \quad$ (2 Parabeln).

An allen anderen Stellen ist J regulär.

$\square$

- Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J(x, y, z)$ des Vektorfeldes $F(x, y, z) := \nabla f(x, y, z)$, wobei $f(x, y, z) = x\,y\,z$. Für welche (x, y, z) ist $J(x, y, z)$ regulär?

- $f(x, y, z) = x\,y\,z \quad \rightsquigarrow$

$$F(x, y, z) \;=\; \nabla f(x, y, z) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y\,z \\ x\,z \\ x\,y \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

$$J(x, y, z) = DF(x, y, z) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Beachte: $J = J(F) = J(\nabla f) = H(f) =$ Hesse-Matrix von f.

- Determinante von $J = J(x, y, z)$:

$$\det J \;=\; 0 \cdot (-x^2) - z\,(-x\,y) + y\,(z\,x) \;=\; 2\,x\,y\,z$$

$\Rightarrow$

$\det J = 0$ (J singulär) entlang der Koordinatenebenen $x = 0,\; y = 0,\; z = 0$.

An allen anderen Stellen ist J regulär. $\square$