5. Übung Ana 2 f. TPH am 24./25.5.2012

Sie finden anbei Ergänzungen zu Lösungen aus dem Übungsskriptum zu den Beispielen, die in der Übung besprochen wurden.

1.3.12.

Es sei $0<b<1$.

Zuerst zeigen wir, daß $Fx(t):=1-2\int_0^t s x(s)\,ds$ eine Kotraktion ist.

Es sei $B:=\left(C[0,b],\ \|f\|_\infty=\max\limits_{0\le t\le b}|f(t)|\right)$. B ist ein Banach Raum.

Es ist zu zeigen:

- (1) $\|Fx-Fy\|_\infty\le \lambda\,\|x-y\|_\infty,\ \lambda<1\ \forall\, x,y\in B$
- (2) $Fx(t)$ ist stetig auf $[0,b]$, d.h.

$$F: C[0,b]\to C[0,b].$$

Ad (1):

$$\|Fx-Fy\|_\infty=\max_{0\le t\le b}|Fx(t)-Fy(t)|=$$

$$=\max_{0\le t\le b} 2\left|\int_0^t s(x(s)-y(s))\,ds\right|\le$$

$$\le \max_{0\le t\le b}\left\{2\left(\max_{0\le s\le t}|x(s)-y(s)|\right)\frac{t^2}{2}\right\}\le b^2\,\|x-y\|_\infty$$

D.h. $L = b^2 < 1$.

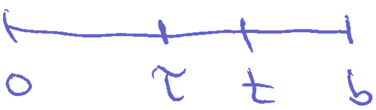
Ad (2) $\quad Fx(t) := 1 - 2\int_0^t s\,x(s)\,dx \;,\; x \in C[0,b]$.

Fx ist stetig in t, falls $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon, t)$ mit

$$|\tau - t| < \delta \Rightarrow |Fx(t) - Fx(\tau)| < \varepsilon.$$

$$|Fx(t) - Fx(\tau)| = 2\left|\int_\tau^t s\,x(s)\,ds\right|$$

o.B.d.A



$\Rightarrow$

$$|Fx(t) - Fx(\tau)| \le \cancel{2}\,\underbrace{\max_{\tau \le s \le t} |x(s)|}_{\le M \text{ das Maximum existiert, da } x \text{ stetig auf einem abgeschl. Int.}}\ \frac{1}{\cancel{2}}(t^2 - \tau^2) \le$$

$$\le M(t-\tau)(\tau+\tau) \le 2bM(t-\tau) \le 2bM\delta \Rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{2Mb}$$

Die Schranke ist sogar glm. in t auf $[a,b]$. $\square$

<u>Iteration:</u> $\quad x_0(t) := 1$

$$x_1(t) = 1 - 2\int_0^t s\,ds = 1 - t^2$$

$$x_2(t) = 1 - 2\int_0^t x_1(s)\,s\,ds = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$x_3(t) = 1 - 2\int_0^t x_2(s)\,s\,ds = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{(t^2)^2}{2!} - \frac{(t^2)^3}{3!}$$

$$\ldots \Rightarrow \quad x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t^2)^k}{k!} \Rightarrow x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = e^{-t^2}$$

Diff-Gl.

Es gilt $x(t) = 1 - 2\int_0^t s\,x(s)\,ds \Rightarrow$

$x(t) = e^{-t^2}$ löst das AWP $\begin{cases} x'(t) = t\,x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$

1.3.18

Wir arbeiten im HR ℓ^2: (Folgenraum)

$$\ell^2 = \{u = (u_1, u_2, \dots), u_i \in \mathbb{R}, \|u\|_2 < \infty\}$$

wobei $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ und $\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i$.

Gegeben sind Folgen

$\varphi_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$, $\varphi_2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$

und $M = \{\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \subset \ell^2$.

Wir prüfen zuerst ob φ_1 und $\varphi_2 \in \ell^2$.

- $\|\varphi_1\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hinweis}}}{=} \frac{\pi^2}{6} < \infty \Rightarrow \varphi_1 \in \ell^2$,
- $\|\varphi_2\|_2^2 = 1 \Rightarrow \varphi_2 \in \ell^2$,

damit ist M ein 2-dim. Unterraum von ℓ^2.

Gegeben ist $x = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots)$.

$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^2 < \infty$ also $x \in \ell^2$ und $x \notin M$.

Aufgabe lautet: Finde $m \in M$ mit

$$\|m - x\|_2 = \min_{y \in M} \|y - x\|_2,$$ also

finde die OP von x auf M.

1. Schritt: Wir brauchen eine ONBasis für M.

Zurzeit haben wir eine Basis $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Es gilt $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow \varphi_1 \not\perp \varphi_2$

$$\|\varphi_1\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \neq 1, \quad \|\varphi_2\|_2 = 1$$

Neue Basis: $B_{ONB} = \{b_1, b_2\}$.

Wähle $b_1 := \varphi_2$. Jetzt GS:

$$\hat{b}_2 = -\frac{\langle \varphi_1, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 + \varphi_1 = \varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_2 = \boxed{= \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)}$$

$$\|\hat{b}_2\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{9} = \frac{3\pi^2 - 2}{8} \Rightarrow \|\hat{b}_2\|_2 = \sqrt{\frac{3\pi^2 - 2}{8}}$$

$$\Downarrow$$

$$b_2 := \frac{\hat{b}_2}{\|\hat{b}_2\|_2} = \sqrt{\frac{18}{3\pi^2 - 2}} \left(\varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_2\right)$$

Damit ist

$$B_{ONB} = \left\{\varphi_2, \sqrt{\frac{18}{3\pi^2 - 2}} \left(\varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_2\right)\right\} =$$

$$= \left\{(0, 0, 1, 0, \dots), \sqrt{\frac{18}{3\pi^2 - 2}} \left(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)\right\}$$

2. Schritt:

$$\Rightarrow m = \langle x, b_1\rangle b_1 + \langle x, b_2\rangle b_2 =$$

$$= \frac{1}{3}\varphi_2 + \frac{3\pi^2-4}{2(3\pi^2-2)}\left(\varphi_1 - \frac{1}{3}\varphi_2\right)$$

mit $\langle x, b_1\rangle = \frac{1}{3}$, $\langle x, b_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3\pi^2-2}}\left(\frac{3\pi^2-4}{12}\right)$.

1.3.23 Wir arbeiten im HR $\mathcal{L}^2$:

$$\mathcal{L}^2(0,1) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ \|f\|_2 < \infty \}$$

mit $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ und $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Gegeben sind $v_1 = 1$, $v_2 = x$. Man sieht leicht, daß $v_1 \in \mathcal{L}^2$ und $v_2 \in \mathcal{L}^2$, da $\|v_1\|_2 < \infty$ und $\|v_2\|_2 < \infty$. Damit ist $M = \{ v = c_1 + c_2 x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum (Dim = 2) von $\mathcal{L}^2$.

Gegeben ist $v = e^x \in \mathcal{L}^2$ (auch leicht zu sehen) und $v \notin M$.

Aufgabe lautet: Finde $m \in M$ mit

$$\|m - v\|_2 = \min_{y \in M} \|y - v\|_2.$$

1. Schritt: Wir brauchen ein ONB für M.

Wir haben die Basis $B = \{1, x\} = \{v_1, v_2\}$

Es gilt $\langle 1, x\rangle = \int_0^1 x\,dx \neq 0$, also $1 \not\perp x$.

$$\|v_1\|_2 = 1, \quad \|v_2\|_2 \neq 1.$$

Also sei $B_{ONB} = \{b_1, b_2\}$.

$$b_1 := v_1 = 1$$

$$\hat{b}_2 := -\frac{\langle v_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} b_1 + v_2 = x - \frac{1}{2}$$

$$\|\hat{b}_2\|_2^2 = \int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12} \Rightarrow \|\hat{b}_2\|_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow b_2 := \frac{\hat{b}_2}{\|b_2\|_2} = \sqrt{3}\,(2x-1)$$

$$\Rightarrow B_{ONB} = \{1, (2x-1)\sqrt{3}\}.$$

2. Schritt:

$$m = \langle e^x, 1\rangle 1 + \langle e^x, \sqrt{3}(2x-1)\rangle \sqrt{3}(2x-1)$$

$$= \underbrace{(e-1)}_{=\langle e^x, 1\rangle} + \underbrace{\sqrt{3}(3-e)}_{=\langle e^x, \sqrt{3}(2x-1)\rangle} \sqrt{3}\,(2x-1)$$

$$\Rightarrow m = \alpha x + \beta, \quad \alpha = 6(3-e), \quad \beta = 2(2e-5)$$

1.3.26

Wir arbeiten im HR $\mathcal{L}^2$:

$$\mathcal{L}^2(a,b) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \, , \, \|f\|_2 < \infty \}$$ vgl. Bsp. 1.3.23.

In diesem Raum gibt es eine ONB

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} , \frac{1}{\sqrt{(b-a)/2}} \sin \frac{2k\pi x}{b-a} , \frac{1}{\sqrt{(b-a)/2}} \cos \frac{2k\pi x}{b-a} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Ist $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$, so gilt für die Entwicklg in eine FR:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi x}{b-a} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{b-a}$$

mit

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2k\pi x}{b-a} \, dx \, , \, k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2k\pi x}{b-a} \, dx , \, k \in \mathbb{N}.$$

Sei $S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos \frac{2k\pi x}{b-a} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{b-a}$,

dann gilt für $f \in \mathcal{L}^2(a,b)$

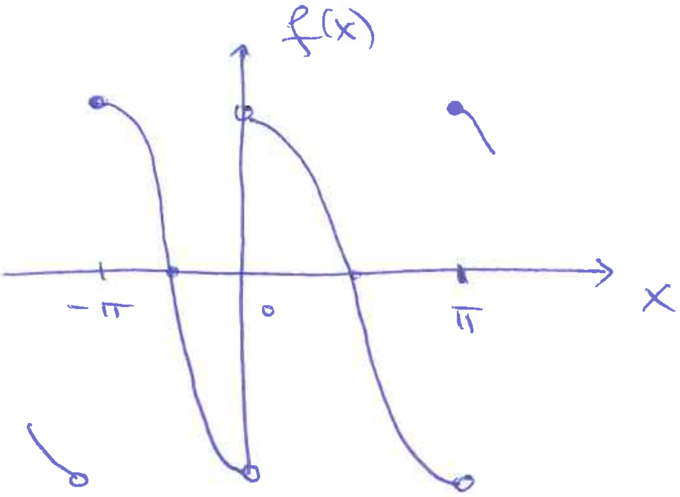
$$\lim_{N \to \infty} \|f - S_N\|_2 = \lim_{N \to \infty} \left(\int_a^b (f(x) - S_N(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

In unserem Fall: $a=-\pi$, $b=\pi$, also $L^2(-\pi,\pi)$.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \,,\quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,dx}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ \cos x, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$



$f(x)$ ist ungerade

$\Downarrow$

$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\Downarrow$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \text{ mit}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos x)\sin kx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x \sin kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x \sin kx\,dx$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right) \Rightarrow$$

$$\cos x \sin kx = \frac{1}{2}\left(\sin((1+k)x) - \sin((1-k)x)\right)$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{\cancel{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\int_{0}^{\pi}\left(\sin((1+k)x) - \sin((1-k)x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(1-k)x}{1-k}\Big|_0^{\pi}\right] =$$

<u>$k \neq 1$</u>

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2k}{1-k^2} - \left(\frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\begin{cases}\dfrac{4k}{k^2-1}, & k \text{ gerade}\\ \emptyset, & k \text{ ungerade}\end{cases}$$

<u>$k=1$</u> $\quad b_1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin 2x\,dx = 0.$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8k}{4k^2-1}\sin(2kx).$$

1.3.26

Beachten Sie die Sätze 2.25 und 2.26.

Punktweise Konvergenz:

$$S_N(x) := \sum_{k=1}^{N} b_k \sin(kx)$$

Es gilt

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (-\pi, \pi)$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = 0 \quad \forall\, x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Gleichmäßige Konvergenz:

Auf $[-\pi, \pi]$ keine glm. Konvergenz, weil f nicht stetig.

Auf $[-\pi+\varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ und $\varepsilon > 0$ fest konv. S_N glm. gegen f.

Konvergenz im Sinne der L_2-Norm:

$f \in L^2(-\pi, \pi) \Rightarrow$ gilt per Konstruktion der FR.