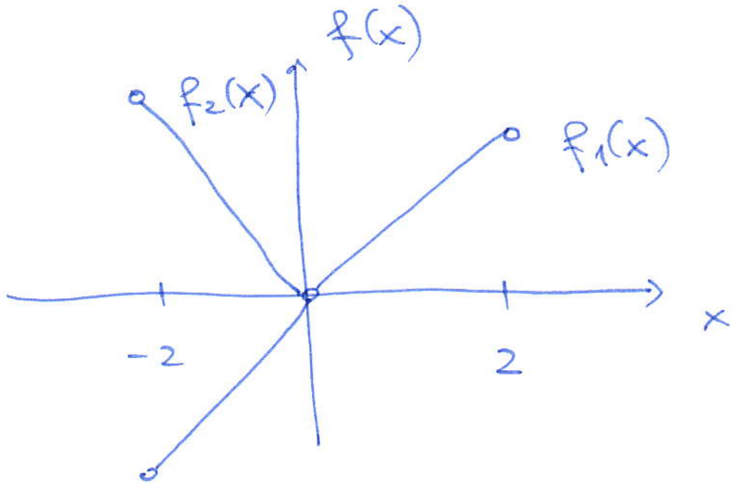
6. Übung Ana2. am 11./14.6.2012

Beispiel 1.3.34



Die Funktion

$$f(x)=x,\ x\in(0,2)$$

wurde zu einer
- ungeraden Funktion f_1
- geraden Funktion f_2

(beide 4-periodisch) ergänzt.

Damit hat man

$$f_1(x)\sim\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}-\dots\right)$$

$$(1)\quad f_1(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

bzw.

$$f_2(x)\sim 1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\dots\right)$$

$$(2)\quad f_2(x)\sim 1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Die Reihe in (1) konv. nicht glm. da f_1 unstetig ist.
Die differenzierte Reihe in (1) divergiert, wegen

$$\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cancel{n}}(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\frac{\cancel{n\pi}}{\cancel{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) = 2(-1)^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$, divergiert die obige Reihe.

Für die Reihe in (2) definieren wir $f_2(-2) = f_2(2) = 2$ und $f_2(0) = 0$. Dann ist f_2 stetig in $\mathbb{R}$, stetig diffbar mit beschr. Abl., bis auf die Stellen $-2, 0, 2$ in $[-2,2]$, wo die 1. Abl. nicht definiert ist. Damit konv. die Reihe in (2) glm. auf jedem abg. Teilintervall von $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad f_2'(x) \sim 1' + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \cdot \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Für $x \in (0,2)$,

$$1 \sim \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\pi^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Rechts steht eine FR für $f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,2) \\ -1, & x \in (-2,0) \end{cases}$

die glm. gegen 1 konv. auf $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ und glm. gegen -1 konv. auf $[-2+\varepsilon, -\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Also $$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Beispiel 1.3.35

Zurück zu $f_1(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ mit

$f_1(x) = x$, $x \in (-2,2)$.

Damit konv. die Reihe glm. auf jedem komp. Teilintervall $[0,\eta]$, $\eta < 2$.

Wir integrieren:

$$\int_0^x \xi \, d\xi = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \int_0^x \sin(n\pi\xi/2) \, d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\xi^2}{2}\Big|_0^x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \left(-\cos\left(\frac{n\pi\xi}{2}\right) \cdot \frac{2}{n\pi}\right)\Big|_0^x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n} \left(\cos\frac{n\pi x}{2} - 1\right) \frac{2}{n\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n} \cos\frac{n\pi x}{2} + C_1$$ mit

$$C_1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n+1}$$

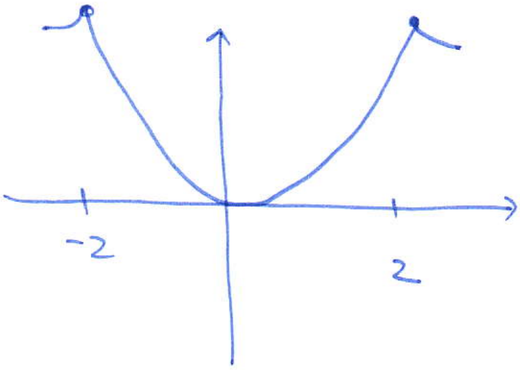
$$\Downarrow$$

$$x^2 = C + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

wobei $C = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}$.

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \text{ mit} \\ \frac{a_0}{2} &= C = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}, \quad a_k = \frac{16}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}(-1)^n. \end{aligned}}$$



Aufgrund von Eigenschaften von x^2, konv. die Reihe glm. gegen x^2 auf jedem komp. Teilintervall in $\mathbb{R}$. Deshalb ist das "=" Zeigen gerechtfertigt.

Wir berechnen nun a_0.

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cdot 1\, dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow C = \frac{a_0}{2} = \frac{\cancel{4}}{3} = \underbrace{\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{n+1} \qquad \square$$

Beispiel 1.3.36

Wir betrachten wieder $f_2(x) = |x|$, $x \in (-2,2)$:

$$f_2(x) \sim 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

$$|x| \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

Pars. Gl. $\quad \underline{a_0 = 2}$; $\underline{a_{2n-1} = \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}}$

$$\|f_2\|_2^2 = \int_{-2}^{2} (f_2(x))^2 dx = \frac{b-a}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{4}{2}\left(\frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^2}{\pi^4(2n-1)^4}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{16}{3} - 2\cdot 2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^2}{\pi^4(2n-1)^4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2n-1)^4}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\pi^2}{\underset{32}{\cancel{64}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\widehat{\Downarrow}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^2}{96}} \qquad \square$$

Beispiel 1.3.37

Berechne $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Es gilt

$$\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\cdots$$

$$-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{4^4}-\frac{1}{6^4}-\frac{1}{8^4}-\cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \frac{1}{2^4}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)}_{=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}$$

$$= S - \frac{1}{16}S = \frac{15}{16}S \implies$$

$$S = \frac{\overset{1}{\cancel{16}}}{15}\cdot\frac{\pi^2}{\underset{6}{\cancel{96}}} = \boxed{\frac{\pi^2}{90} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}} \qquad \square$$

Beispiel 1.4.6

$$f(z) = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = u(x,y) + i v(x,y)$$

mit $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) \equiv 0$.

(b) 1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sind $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ stetig.

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$ ↯.

also nicht diffbar im $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(a) Betrachte für $z \neq 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|z+h| - |z|}{h}$$

Wir berechnen

$$|z+h| - |z| = (|z+h| - |z|) \frac{|z+h|+|z|}{|z+h|+|z|} =$$

$$= \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{|z+h| + |z|} = \frac{(z+h)(\bar{z}+\bar{h}) - z\cdot\bar{z}}{|z+h|+|z|} =$$

$$= \frac{\cancel{z\bar{z}} + \bar{z}h + z\bar{h} + h\bar{h} - \cancel{z\bar{z}}}{|z+h|+|z|} = \frac{h\left(\bar{z} + z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{h}\right)}{|z+h|+|z|}.$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|z+h|-|z|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{z} + z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{h}}{|z+h|+|z|}$$

Betrachte

$h = h_1 \to 0$ d.h. $h_2 = 0$; $\overline{h_1} = h_1$

$$\Rightarrow \lim_{h_1 \to 0} \frac{\bar{z} + z\frac{\overline{h_1}}{h_1} + \overline{h_1}}{|z+h_1| + |z|} = \frac{\bar{z}+z}{2|z|} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

Betrachte

$h = ih_2 \to 0$ d.h. $h_1 = 0$ $\bar{h} = -h = -ih_2$

$$\Rightarrow \lim_{h_2 \to 0} \frac{\bar{z} + z\frac{(-ih_2)}{ih_2} + (-ih_2)}{|z+ih_2| + |z|} = \frac{\bar{z}-z}{2|z|} = \frac{-2i\operatorname{Im} z}{2|z|}$$

$$= -\frac{i\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Da $\frac{\operatorname{Re}|z|}{|z|} \neq -i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$ ist f nicht diffbar. in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Siehe Bemerkg auf Seite 9 zum Fall $z=0$.

Beispiel 1.4.7

(a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) \equiv 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \lightning \text{ nicht diffbar.}$$

(b) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig diffbar in $z_0 \overset{?}{\Rightarrow}$ f stetig in z_0.

f stetig in $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_0) = 0.$

Betrachte

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)-f(z_0)\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)$$

$$= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\lim_{z\to z_0}(z-z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0.$$

$\uparrow$ weil sowohl $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ $\exists$ als

auch $\lim\limits_{z\to z_0} z-z_0$ $\exists$.

Bemerkung zu 1.4.6.

Betrachte $z=0$. $\Rightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|z+h|-|z|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

Es sei $h = ah_1$, $h_1\to 0$, $a>0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{h_1\to 0}\frac{ah_1}{ah_1} = 1$$

$\neq$

Es sei $h = bh_1$, $h_1\to 0$ $b<0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{h_1\to 0}\frac{-bh_1}{bh_1} = -1$$

also auch nicht diffbar in $z=0$.