•

a) Geben Sie alle Lösungen $z_{n,0}, \ldots, z_{n,n-1} \in \mathbb{C}$ der Gleichung

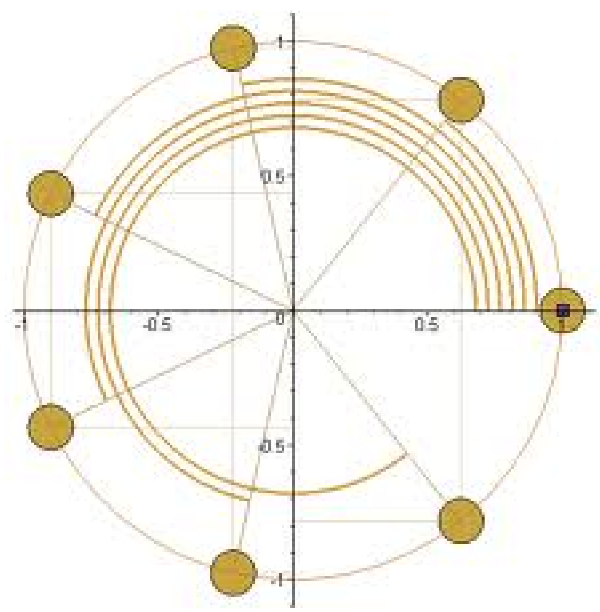
$$z^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

an. Diese nennt man komplexe Einheitswurzeln; $z_{n,0} = 1$ ist immer eine Lösung. Machen Sie auch eine Skizze für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_{n,j}^k = \begin{cases} n, & j = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

• $n = 7$:



a) Für

$$z_{n,j} = e^{\frac{2\pi j i}{n}} = \cos\frac{2\pi j}{n} + i \sin\frac{2\pi j}{n}, \quad j = 0 \ldots n-1$$

gilt

$$\left(z_{n,j}\right)^n = e^{2\pi j i} = \left(e^{2\pi i}\right)^j = 1^j = 1 \qquad \checkmark$$

n	$z_{n,j}$
1	1
2	$1, \quad -1$
3	$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$
4	$1, \quad i, \quad -1, \quad -i$
	$\ldots$

$\longrightarrow$

b) Notation:

$$\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad \text{also} \quad z_{n,j} = \omega_n^j$$

$\rightsquigarrow$ [geometrische Summe:]

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_{n,j}^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^j\right)^k = \begin{cases} n\,, & j = 0, \\ \dfrac{1 - \left(\omega_n^j\right)^n}{1 - \omega_n^j} = 0\,, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \checkmark$$

wegen $\left(\omega_n^j\right)^n = 1$.

$\square$

- Fortsetzung von Aufgabe 1:

a) Man schreibt die $z_{n,j}$ meist in der Form $z_{n,j} = \omega_n^j$ mit $\omega_n = \ldots$? Zeigen Sie: Alle Koeffizienten der Matrix $W_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$W_n = \begin{pmatrix} \omega_n^0 & \omega_n^0 & \omega_n^0 & \ldots & \omega_n^0 \\ \omega_n^0 & \omega_n^1 & \omega_n^2 & \ldots & \omega_n^{n-1} \\ \omega_n^0 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \ldots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^0 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \ldots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

sind komplexe Einheitswurzeln.

b) Stellen Sie die die Hermite'sch transponierte (= transponierte + komplex konjugierte) Matrix W_n^* in einer zu W_n analogen Form dar. Dabei ersetzt man einfach ω_n durch …

---

a)

$$\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\tfrac{2\pi}{n} + i \sin\tfrac{2\pi}{n}$$

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, $k = \ell\, n + j \quad (0 \le j < n)$:

$$\omega_n^k = \omega_n^{\ell\, n+j} = \left(\omega_n^n\right)^\ell \omega_n^j = \omega_n^j \qquad \checkmark$$

b) Mit

$$\overline{\omega}_n = e^{-\frac{2\pi i}{n}} = \cos\tfrac{2\pi}{n} - i \sin\tfrac{2\pi}{n}\,, \qquad \overline{\omega_n^k} = \overline{\omega}_n^k$$

gilt

$$W_n^* = \begin{pmatrix} \overline{\omega}_n^0 & \overline{\omega}_n^0 & \overline{\omega}_n^0 & \ldots & \overline{\omega}_n^0 \\ \overline{\omega}_n^0 & \overline{\omega}_n^1 & \overline{\omega}_n^2 & \ldots & \overline{\omega}_n^{n-1} \\ \overline{\omega}_n^0 & \overline{\omega}_n^2 & \overline{\omega}_n^4 & \ldots & \overline{\omega}_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\omega}_n^0 & \overline{\omega}_n^{n-1} & \overline{\omega}_n^{2(n-1)} & \ldots & \overline{\omega}_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

Beispiel: $n = 4$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}, \quad W_4^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

– W_n symmetrisch ($W_n = W_n^T$), aber nicht Hermite'sch ($W_n \neq W_n^*$)

– $\frac{1}{\sqrt{n}} W_n$ ist unitär: $W_n W_n^* = n\, I_n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{j\,k} \bar{\omega}_n^{\ell\,k} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n\,, & j = \ell\,, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(j-l)k} = 0\,, & j \neq \ell \end{cases} \qquad \checkmark$$

(siehe Aufgabe 1).

– Für die Durchführung der Matrix-Vektor-Multiplikation

$$v = W_n\, u \quad \text{bzw.} \quad u = W_n^*\, v$$

(diskrete Fourier[rück]transformation, DFT) gibt es einen schnellen rekursiven Algorithmus mit Aufwand $\mathcal{O}(n \log n)$ ('Fast Fourier Transform', FFT).

$\square$

•

Bestimmen Sie eine gebrochen lineare Transformation der Gestalt

$$w(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$$

so, dass

$$w(-i) = -1, \quad w(0) = i, \quad w(i) = 1$$

gilt. In welche Kurve wird durch diese Abbildung die imaginäre Achse übergeführt?

- Forderungen an $w(z)$:

$$w(-i) \;=\; \frac{-a\,i+b}{-c\,i+d} \;=\; -1$$

$$w(0) \;=\; \frac{b}{d} \;=\; i$$

$$w(i) \;=\; \frac{a\,i+b}{c\,i+d} \;=\; 1$$

$\rightsquigarrow$ 3 lineare Gleichungen für a, b, c, d:

(i) $\quad -a\,i+b \;=\; c\,i-d$

(ii) $\quad b \;=\; i\,d$

(iii) $\quad a\,i+b \;=\; c\,i+d$

– (i) + (iii) $\;\Rightarrow\;$ $b = i\,c$

– (i) − (iii) $\;\Rightarrow\;$ $d = i\,a$

– Daraus mit (ii): $\cancel{i}\,c \;=\; \cancel{i}\,d$

– $a \neq 0$ (ansonsten $d = c = b = a = 0$); wähle (o.B.d.A.) $a = i$ $\;\rightsquigarrow$

$$d \;=\; -1, \quad c = -1, \quad b = -i$$

$\rightsquigarrow$

$$w(z) \;=\; i\,\frac{1+z}{1-z}$$

$\longrightarrow$

- Imaginäre Achse: $z = i\,t,\ t \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow$

$$w(i\,t) \;=\; i\,\frac{1 - i\,t}{1 + i\,t} \;=\; i\,\frac{(1 - i\,t)^2}{(1 - i\,t)(1 + i\,t)}$$

$$\;=\; i\,\frac{1 - 2\,i\,t - t^2}{1 + t^2} \;=\; \frac{2\,t}{1 + t^2} \;+\; i\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Beachte

$$|w(i\,t)|^2 = \frac{4\,t^2 + (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2} \;\equiv\; 1$$

$\Rightarrow$

$$\text{Bild (imaginäre Achse)} \;=\; \text{Einheitskreis}$$

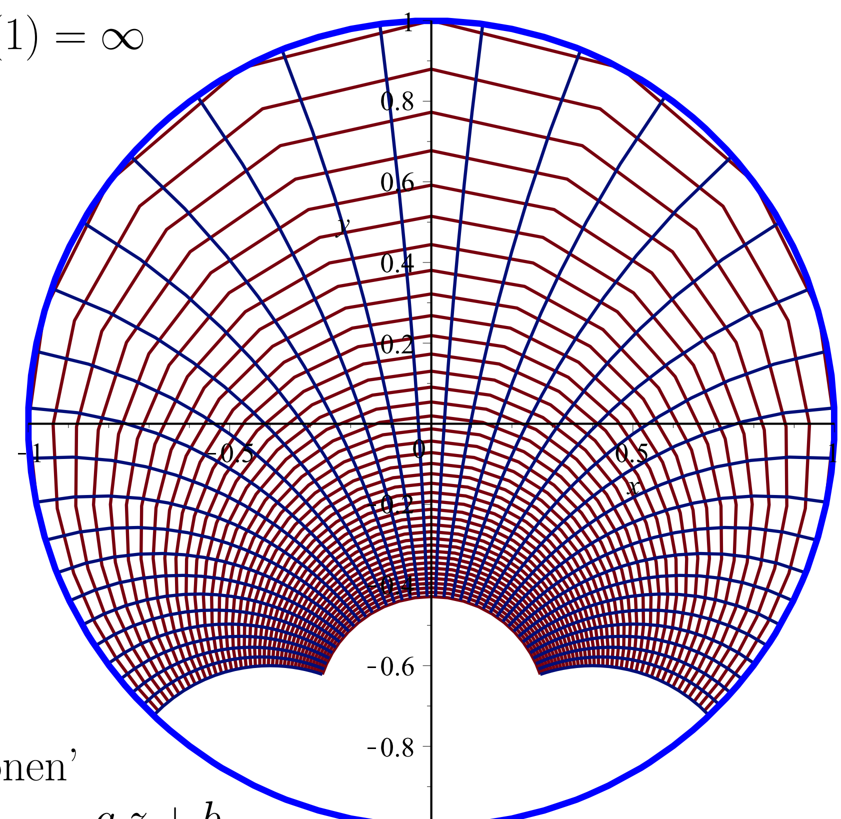
Es ist

$$w(i\,t) = e^{i\,\varphi(t)}, \qquad \varphi(t) = \arctan\,\frac{1 - t^2}{2\,t}$$

– Oberer Halbkreis: Bild von $[-i, i]$

– Unterer Halbkreis: Bild des äußeren Abschnittes

– $w(-1) = 0,\ \ w(\infty) = -i,\ \ w(1) = \infty$



- Auch: ‘Möbius-Transformationen’

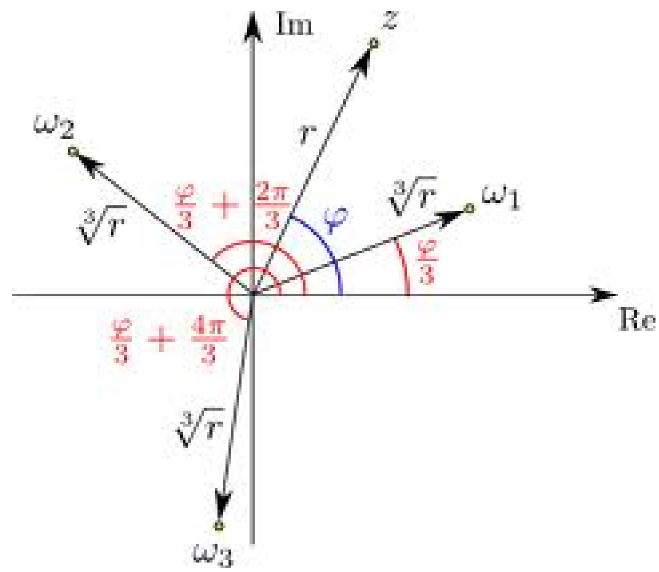
$$w(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

bilden Kreise [Geraden] konform auf Kreise [Geraden] ab. $\square$

- Charakterisieren Sie anhand einer Skizze das Verhalten der Funktion $w = f(z) = z^3$ und geben Sie die drei Zweige der Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ an. Können Sie den Hauptzweig so wählen, dass er eine Erweiterung der reellen Funktion $\sqrt[3]{x}$ darstellt?

Schreiben Sie die drei Zweige explizit formelmäßig an, inklusive deren Definitionsbereiche.

Notation in Bild: $w_j = \sqrt[3]{z},\ j = 1, 2, 3$



- Für

$$z = r\, e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$\rightsquigarrow$

$$w = z^3 = r^3\, e^{3i\varphi}, \quad 0 \le 3\varphi < 6\pi$$

… $\mathbb{C}$ wird durch z^3 dreifach überdeckt.

Z.B.:

– $z^3 = +1$ für Einheitswurzeln $z = \omega_3^j = 1,\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{\frac{4\pi i}{3}}$

– $z^3 = -1$ für Einheitswurzeln, gespiegelt an imaginärer Achse

- $f(z) = z^3$ z.B. injektiv auf den Sektoren [Skizze]

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \varphi < \tfrac{2\pi}{3}\}, \quad f(S_1) = \mathbb{C}$$

$$S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \tfrac{2\pi}{3} \le \varphi < \tfrac{4\pi}{3}\}, \quad f(S_2) = \mathbb{C}$$

$$S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \tfrac{4\pi}{3} \le \varphi < 2\pi\}, \quad f(S_3) = \mathbb{C}$$

$\longrightarrow$

- Zweige der Umkehrfunktion, für $w = \rho\, e^{i\,\psi} \in \mathbb{C}$:

$$f_1^{-1}(w) \;=\; \sqrt[3]{\rho}\; e^{\frac{i\,\psi}{3}}, \qquad f_1^{-1}(\mathbb{C}) \;=\; S_1; \quad f_1^{-1}(1) = 1$$
$$f_2^{-1}(w) \;=\; \sqrt[3]{\rho}\; e^{\frac{i\,(2\pi+\psi)}{3}}, \quad f_2^{-1}(\mathbb{C}) \;=\; S_2; \quad f_2^{-1}(1) = e^{\frac{2\,\pi\,i}{3}}$$
$$f_3^{-1}(w) \;=\; \sqrt[3]{\rho}\; e^{\frac{i\,(4\pi+\psi)}{3}}, \quad f_3^{-1}(\mathbb{C}) \;=\; S_3; \quad f_3^{-1}(1) = e^{\frac{4\,\pi\,i}{3}}$$

- Beachte (setze $\rho = 1$)

$$\lim_{\psi\uparrow 2\pi} f_1^{-1}(e^{i\,\psi}) \;=\; e^{\frac{2\,\pi\,i}{3}} \neq f_1^{-1}(e^{2\,\pi\,i}) \;=\; f_1^{-1}(1) = 1,$$

analog für f_2^{-1}, f_3^{-1}. Die Umkehrfunktionen sind unstetig entlang der positiven reellen Achse (Verzweigungsschnitt). $z = 0$ ist ein dreifacher Verzweigungspunkt (dreifache Nullstelle von z^3).

- Für die reelle Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (streng monoton wachsend, bijektiv) gilt

$$f^{-1}(\mathbb{R}^+) \;=\; \mathbb{R}^+, \quad f^{-1}(\mathbb{R}^-) \;=\; \mathbb{R}^-, \quad f^{-1}(\mathbb{R}) \;=\; \mathbb{R}$$

Aber: $\mathbb{R} \not\subseteq S_j,\; j = 1, 2, 3$. Auch durch andere Wahl der Sektoren (verdreht) kann man nicht erreichen, dass ein einzelner Zweig eine Erweiterung der reellen Version darstellt.

- Alternative Definition des Hauptzweiges: Wähle

$$S_1 \;=\; \{z \in \mathbb{C} :\; -\tfrac{\pi}{3} \leq \varphi < \tfrac{\pi}{3}\}$$

$\rightsquigarrow$ stetig entlang $\mathbb{R}^+$; Verzweigungsschnitt um $\frac{\pi}{3}$ verdreht.

$\square$

• Die Regel von de l'Hospital gilt auch im Komplexen. Verwenden Sie diese dazu, um folgende unbestimmte Ausdrücke auszuwerten:

$$\textbf{a)}\quad \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{2\,z^2+(3-4\,i)z-6\,i}\,, \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$$

---

a)

$$\frac{z^2+4}{2\,z^2+(3-4\,i)z-6\,i} = \frac{f(z)}{g(z)}$$

mit

$$\begin{aligned} f(2\,i) &= 4\,i^2+4 = 0\,, \\ g(4\,i) &= 2\cdot 4\,i^2+(3-4\,i)\,2\,i-6\,i \\ &= -8+6\,i+8-6\,i=0 \end{aligned}$$

Zähler und Nenner besitzen gemeinsame Nullstelle $2\,i$.

De l'Hospital:

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2\,z, \qquad f'(2\,i)=4\,i \\ g'(z) &= 4\,z+(3-4\,i)\,, \quad g'(2\,i)=3+4\,i \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{2\,z^2+(3-4\,i)z-6\,i} &= \frac{4\,i}{3+4\,i} = \frac{4\,i\,(3-4\,i)}{(3+4\,i)(3-4\,i)} \\ &= \frac{16+12\,i}{3^2+4^2} = \frac{16}{25}+\frac{12}{25}\,i \end{aligned}$$

... hebbare Unstetigkeit.

Alternative in diesem Fall: Faktorisieren von Zähler und Nenner (quadratische Gleichungen), durchkürzen.

$\longrightarrow$

b) i ist Einheitswurzel für jedes gerade n.

$$\frac{z^{10}+1}{z^6+1} = \frac{f(z)}{g(z)}$$

mit

$$f(i) = i^{10}+1 = 0\,, \quad g(i) = i^6+1 = 0$$

De l'Hospital:

$$f'(z) = 10\,z^9, \quad f'(i) = 10\,i^9 = 10\,i; \qquad g'(z) = 6\,z^5, \quad g'(i) = 6\,i$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1} = \frac{10\,i}{6\,i} = \frac{5}{3}$$

$\square$

- Sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Durch die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^k \ln n}_{a_n} \, z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

ist eine komplexe Funktion definiert, soferne die Reihe konvergiert. Wie lautet ihr Konvergenzradius?

- Vorüberlegung:

$$\ln(n+1) - \ln n \;=\; \frac{1}{x} \;<\; \frac{1}{n} \quad (\text{MWS};\; x \in [n, n+1])$$

Formel für Konvergenzradius (Variante gemäß Quotientenkriterium):

$$R \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Hier:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} \;&=\; \frac{(n+1)^k \, \ln(n+1)}{n^k \, \ln n} \;=\; \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^k \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \\
&\leq\; \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^k \frac{\ln n + \frac{1}{n}}{\ln n} \\
&=\; \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^k \left(1 + \tfrac{1}{n \, \ln n}\right) \;\to\; 1 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad R = 1$, wie bei (verallgemeinerter) geometrischer Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k z^n$.

(Etwas aufwendiger mit Variante gemäß Wurzelkriterium:

$$R \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad)$$

Anmerkung [siehe VO]: Eine konvergente Potenzreihe stellt im Inneren ihres Konvergenzkreises eine (unendlich oft komplex) differenzierbare Funktion $f(z)$. Die Potenzreihe ist die Taylorreihe von f (hier: bezüglich $z_0 = 0$).

$\square$

- Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ besitzt den Konvergenzradius $R = 1$, und für $|z| < 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,.$$

Im Inneren ihres Konvergenzgebietes stellt eine konvergente Potenzreihe eine komplex differenzierbare Funktion dar, und ihre Ableitung wird durch die gliedweise differenzierte Reihe dargestellt. Verwenden Sie diese Tatsache dazu, um den Wert der verallgemeinerten geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n, \quad |z| < 1$$

zu berechnen.

- Gliedweise Differentiation $\rightsquigarrow$ für $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{d}{dz}\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n \\ &= \frac{1}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n\end{aligned}$$

Andererseits:

$$\tfrac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2} \qquad \checkmark$$

$\square$

UE 7 / Aufgabe 8

- Verwenden Sie die Substitution $z = e^{i\,x}$ dazu, um das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^4\, dx$$

in ein komplexes Kurvenintegral einer rationalen Funktion $R(z)$ umzuschreiben. Geben Sie $R(z)$ der Form $R(z) = P(z)/Q(z)$ an (P, Q komplexe Polynome).

- Substitution $x \mapsto z$:

$$z \;=\; e^{i\,x}, \qquad dz \;=\; i\, e^{i\,x}\, dx, \quad dx = \frac{dz}{i\,z}$$

Zusammen mit

$$\cos x \;=\; \mathrm{Re}\; e^{ix} \;=\; \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2} \;=\; \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$\left[\;\sin x \;=\; \mathrm{Im}\; e^{ix} \;=\; \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i} \;=\; \frac{z - z^{-1}}{2\,i}\;\right]$$

$\rightsquigarrow$

$$(\cos x)^4 \;=\; \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^4 \;=\; \tfrac{1}{16}\left(z^{-1}(1 + z^2)\right)^4$$

$$=\; \frac{(1 + z^2)^4}{16\, z^4} \;=\; \frac{1 + 4\,z^2 + 6\,z^4 + 4\,z^6 + z^8}{16\,z^4}$$

$\rightsquigarrow$

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^4\, dx \;=\; \frac{1}{16}\,\frac{1}{i}\oint_{|z|\,=\,1} \frac{1}{z}\,\frac{(1 + z^2)^{\,4}}{z^4}\, dz$$

mit Pol 5. Ordnung an $z_0 = 0$, und

$$\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{(1 + z^2)^{\,4}}{z^5} \;=\; \mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{1 + 4\,z^2 + \underline{6\,z^4} + 4\,z^6 + z^8}{z^5} \;=\; 6$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^4\, dx \;=\; \frac{2\,\pi\,i}{16\,i}\cdot 6 \;=\; \frac{3\,\pi}{4}$$

Oder: Berechnung des Residuums gemäß ($z = z_0$, $m = 5$):

$$\mathrm{Res}_{z=0}\,\frac{(1 + z^2)^{\,4}}{z^5} \;=\; \frac{1}{4!}\,\frac{d^4}{dz^4}\left(\cancel{z^5}\,\frac{(1 + z^2)^{\,4}}{\cancel{z^5}}\right)\Big|_{z=0} \;=\; \frac{1}{24}\,\frac{d^4}{dz^4}\left(1{+}z^2\right)^4 \;=\; \frac{144}{24} \;=\; 6$$

$\square$

•

a) Sei $f(z)$ eine komplex differenzierbare Funktion, $z_0 \in \mathbb{C}$, und $r > 0$. Beweisen Sie die Mittelwerteigenschaft

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\, e^{i\varphi})\, d\varphi\,.$$

b) Verwenden Sie a) dazu, um das reelle bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x)\, dx$$

zu berechnen.

---

a) Sei $C = \{z_0 + r\, e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$

Cauchy'sche Integralformel:

$$f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Substitution $z \mapsto \varphi$ (umgekehrt zu Aufgabe 8):

$$z - z_0 \;=\; r\, e^{i\varphi}, \qquad dz \;=\; i\, r\, e^{i\varphi}\, d\varphi$$

$\rightsquigarrow$

$$f(z_0) \;=\; \frac{\cancel{i}}{2\pi\, \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\, e^{i\varphi})}{\cancel{r\, e^{i\varphi}}}\, \cancel{r\, e^{i\varphi}}\, d\varphi \qquad \checkmark$$

b) Für $z_0 = 0$, $r = 1$, und

$$f(z) \;=\; e^z\,, \quad f(0) = 1$$

$\rightsquigarrow$

$$2\pi \;=\; 2\pi\, f(0) \;=\; \int_0^{2\pi} f(0 + 1 \cdot e^{i x})\, dx \;=\; \int_0^{2\pi} f(e^{i x})\, dx \;=\; \int_0^{2\pi} e^{e^{i x}}\, dx$$

mit

$$e^{e^{i x}} \;=\; e^{\cos x + i\, \sin x} \;=\; e^{\cos x}\, e^{i\, \sin x} \;=\; e^{\cos x}\big(\cos(\sin x) + i\, \sin(\sin x)\big)$$

Nehme Realteil $\;\Rightarrow\;$ Wert des Integrals $= 2\pi$. $\square$

UE 7 / Aufgabe 10

- Gegeben sei das Integral

$$\oint_C \frac{2\,z^2-3}{2\,i-\frac{z}{i}}\,dz,$$

wobei $C = \{z \in \mathbb{C} :\ |z+2| = 1\}$ (positive Orientierung).

a) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung der Kreislinie C.

b) Die Aufgabe lässt sich einfacher lösen, ohne die Integration wie unter a) explizit auszuführen. Zeigen Sie, wie das geht.

---

a) $C = \{-2+e^{i\,\varphi},\, 0 \le \varphi \le 2\,\pi\}$

Substitution $z \mapsto \varphi$:

$$z \;=\; -2+e^{i\,\varphi}, \qquad dz \;=\; i\,e^{i\,\varphi}\,d\varphi$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{2\,z^2-3}{2\,i-\frac{z}{i}}\,dz &= \int_0^{2\,\pi} \frac{2\,(-2+e^{i\,\varphi})^2-3}{2\,i-(-2+e^{i\,\varphi})/i}\,i\,e^{i\,\varphi}\,d\varphi \\
&= i\int_0^{2\,\pi} \frac{8-8\,e^{i\,\varphi}+2\,e^{2\,i\,\varphi}-3}{\cancel{2i}-\cancel{2i}+i\,\cancel{e^{i\varphi}}}\,\cancel{e^{i\varphi}}\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\,\pi}\left(5-8\,e^{i\,\varphi}+2\,e^{2\,i\,\varphi}\right)d\varphi \\
&= \left(5\,\varphi-\tfrac{8}{i}\,e^{i\varphi}+\tfrac{2}{2\,i}\,e^{2\,i\,\varphi}\right)\Big|_{\varphi=0}^{2\,\pi} \\
&= 10\,\pi+8\,i\,(e^{2\,\pi\,i}-1)-i\,(e^{4\,\pi\,i}-1) \;=\; 10\,\pi
\end{aligned}$$

b) Verwende Cauchy'sche Integralformel für $f(z) = 2\,z^2-3$ $(z_0 = -2)$:

$$\oint_C \frac{f(z)}{2\,i-\frac{z}{i}}\,dz \;=\; \frac{1}{i}\oint_C \frac{f(z)}{2+z}\,dz \;=\; 2\,\pi\,\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-(-2)}\,dz$$

$$\stackrel{\downarrow}{=}\; 2\,\pi\,f(-2) \;=\; 2\,\pi\,(2\cdot 4-3) \;=\; 10\,\pi \qquad \checkmark$$

$\square$