**1.** Für die Abstandsmessung im $\mathbb{R}^n$ verwendet man den Begriff der **Norm** von Vektoren. Eine Norm $\|x\|$ ist eine Formel dafür, die 'Größe' von Vektoren (Punkten) zu messen, und dann misst die Norm des Differenzvektors $\|x-y\|$ den Abstand zwischen $x$ und $y$. Eine natürliche (für $n \leq 3$ anschauliche naheliegende) Norm ist die Euklidische Norm,

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,.$$

Nun beschreiben aber z.B. auch die Ausdrücke [1]

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|\,, \qquad \text{oder} \qquad \|x\|_\infty := \max_{i=1\ldots n} |x_i|\,,$$

die Größe von Vektoren in sinnvoller Weise. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind zu $\|\cdot\|_2$ alternative Normen.

Wir betrachten jetzt nur den Fall $n = 2$:

a) Charakterisieren Sie obige drei Normen durch Ihre 'Norm-Einheitskreise', das sind die durch $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ definierten Kurven ($\to$ Skizze).

b) Verwenden Sie diese Skizze dazu, um zu (geometrisch anschaulich) zu argumentieren: [2]
Wenn immer man zwei beliebige der obigen drei Normen hernimmt, nennen wir sie $\|x\|_\alpha$ und $\|x\|_\beta$, dann gibt es eine Konstante $C_{\alpha,\beta}$ so dass gilt

$$\|x\|_\alpha \leq C_{\alpha,\beta}\,\|x\|_\beta$$

für beliebige $x \in \mathbb{R}^2$. Man sagt: Alle diese Normen sind **äquivalent**, und analoge Aussagen gelten im $\mathbb{R}^n$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von b):
*Die Konvergenz einer Folge* $(x_k)$ *im* $\mathbb{R}^2$ *(Definition 1.6) ist unabhängig davon, welche dieser Normen man zugrunde legt.*

Siehe dazu auch Aufgabe 2.

**2.** a) Zeigen Sie, dass für jede der drei in Aufgabe 1 betrachteten Normen die *Dreiecksungleichung* gilt, d.h. [3]

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(Für die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist das anschaulich klar $-$ aber wie funktioniert der allgemeine Beweis?)

b) Aufgrund des Bestehens der Dreiecksungleichung ist die Erweiterung vieler Aussagen aus dem eindimensionalen Fall ($n = 1$, 'Analysis I', mit $\|x\| = |x|$) auf den allgemeinen Fall problemlos möglich.

*Beispiel:* Definieren Sie den Begriff einer *Cauchyfolge* im $\mathbb{R}^n$ und zeigen Sie: *Jede konvergente Folge* $(x_k)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *ist eine Cauchyfolge.*

**3.** Wenn eine Funktionen $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0$ eine Sprungstelle (Sprung-Unstetigkeit) besitzt, dann stimmt der linksseitige nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert überein.

Im höheren Dimensionen kann es vorkommen, dass der Limes einer Funktion an einer Stelle richtungsabhängig ist. Betrachten Sie z.B. die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

[1] Ev. auch $\|x\|_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i|$, eine Art arithmetisches Mittel.

[2] Man kann die optimalen Konstanten auch ausrechnen; das ist etwas Abschätzungsarbeit.

[3] Man beachte auch: $x = 0 \;\Leftrightarrow\; \|x\| = 0$ $-$ das ist einfach.

Zeigen Sie, dass diese Funktion an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ nicht stetig fortsetzbar ist, weil der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existiert. Um dies zu argumentieren, betrachten Sie den Limes von $f(x,y)$ entlang einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt. Wie ist das Verhalten dieses Limes in Abhängigkeit von der Orientierung dieser Geraden?

**4.** Die Euklidische Norm $\|x\|_2$ kann man als skalarwertige Funktion auffassen, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $f(x) := \|x\|_2$. Für welche $x \in \mathbb{R}^n$ ist diese Funktion (total) differenzierbar (linear approximierbar)? Geben Sie auch ihren Gradienten an.

**5.** [1.1.6]: Untersuchen Sie für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)), \quad f(0,0) := 0$$

die Stetigkeit, Richtungsdifferenzierbarkeit (d.h. die Existenz der Richtungsableitungen) sowie die totale Differenzierbarkeit.

**6.** Die kinetische Energie $T$ eines Objektes mit Masse $m$ und Geschwindigkeit $v$ ist eine Funktion von $m$ und $v$,

$$T = T(m,v) = \frac{m\,v^2}{2}\,.$$

a) Geben Sie die Linearisierung von $T(m,v)$ an einer Stelle $(m,v) = (m_0, v_0)$ an.

b) Die Masse $m = m_0$ eines Objektes sei nur mit einer Unsicherheit von (max.) $\pm 0.01\,\mathrm{kg}$ bekannt, und die Geschwindigkeit $v = v_0$ nur bis auf $\pm 0.002\,\mathrm{m/s}$. Wie genau lässt sich dann der Wert der kinetischen Energie $T$ bestimmen?

**7.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Ein Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(Ax\cdot x) + (b\cdot x) + c$$

($\cdot$ symbolisiert das euklidische innere Produkt im $\mathbb{R}^n$).

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$, jedoch nicht indem Sie die partiellen Ableitungen berechnen, sondern indem Sie (geschickterweise) direkt mit Definition 1.11 arbeiten, um $\nabla f$ direkt als Vektor darzustellen. (Sie benötigen dazu ein bisschen elementare Lineare Algebra.)

b) Betrachten Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) = 0\}$. In welchem Fall besteht diese Menge nur aus einem einzigen Element, und wie berechnet man dieses?

**8.** Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *symmetrische* Matrix. Wir betrachten die skalarwertige Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\,((Ax)\cdot x)$ (inneres Produkt), analog wie in Aufgabe 7.

Sei $x$ ein *Eigenvektor* von $A$ zu einem einfachen Eigenwert $\lambda$. [4]

a) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_v f(x)$.

b) Für welche $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $D_v f(x) = 0$?

**9.** [1.1.3]: Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J(x,y)$ des Vektorfeldes

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^4 \\ x^2\,y^2 \end{pmatrix}$$

Für welche $(x,y)$ ist $J(x,y)$ regulär?

**10.** Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J(x,y,z)$ des Vektorfeldes $F(x,y,z) := \nabla f(x,y,z)$, wobei $f(x,y,z) = x\,y\,z$. Für welche $(x,y,z)$ ist $J(x,y,z)$ regulär?

[4] Da ist ein bisschen 'Lineare Algebra' Nachlesen nützlich (Eigenstruktur symmetrischer Matrizen).