1. [1.1.14] Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z\,.$$

a) Skizzieren Sie die Niveauflächen $N_c(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ f(x,y,z) = c\}$.

b) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $(1,1,2) \in N_c(f)$, und berechnen Sie die Richtungsableitungvon f in Richtung von ∇f in diesem Punkt. Verifizieren Sie, dass ∇f orthogonal auf die Niveaufläche steht.

2. Ein Massepunkt bewegt sich entlang der Bahnkurve

$$C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0$$

(t = Zeit).[1] Die Raumtemperatur T im $\mathbb{R}^3$ sei ortsabhängig,

$$T = T(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Temperatur T nach der Zeit t entlang der Bahnkurve $C(t)$ mit Hilfe der Kettenregel. Überprüfen Sie Ihr Resultat durch direktes Differenzieren.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein ebenes Skalarfeld. In Polarkoordinaten ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) entspricht dies einer Funktion $g(r,\varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, d.h. g ist eine Darstellung von f bezüglich Polarkoordinaten.

a) Das Feld sei nun von vornherein in der Form $g = g(r,\varphi)$ gegeben. Drücken Sie den Gradienten $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial r}$ und $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ aus.

Hinweis: Leiten Sie mit Hilfe der Kettenregel ein Gleichungssystem für $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ her und lösen Sie es.

b) Berechnen Sie ∇f direkt und gemäß a) für $f(x,y) = x^2 + y^2$ (d.h., $g(r,\varphi) = r^2$).

Anmerkung: In der Praxis würde man für $g(r,\varphi)$ oft einfach $f(r,\varphi)$ schreiben (mit dem gleichen Namen wie für $f(x,y)$), obwohl das natürlich formal nicht ganz korrekt ist.

4. Für zweimal differenzierbares $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist der *Laplace-Operator* definiert durch

$$\Delta f = \nabla f \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,.$$

Wir gehen von (x,y)-Koordinaten über auf ein um irgendeinen festen Winkel α verdrehtes kartesisches Koordinatensystem (ξ,η), gemäß

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad (\,c = \cos\alpha,\ s = \sin\alpha\,)\,.$$

Dann ist $g(\xi,\eta) := f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ eine Darstellung von f bezüglich der neuen Koordinaten.

Zeigen Sie: Der Laplace-Operator ist invariant bezüglich einer derartigen Koordinatentransformation, d.h., es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}\,.$$

Anmerkung: Beweis mit Hilfe der Kettenregel. In analoger Weise kann man zeigen, dass allgemein gilt: Der (n-dimensionale) Laplace-Operator ist invariant gegenüber beliebigen linearen, orthogonalen Koordinatentransformationen.

[1]Z.B. Zeit gemessen in s, aber auf die konkreten Einheiten kommt es uns hier nicht an.

5. Sei $p(x) = p(x_1, x_2, x_3)$ ein homogenes Polynom vom Grad 2 in den Variablen x_1, x_2, x_3, bzw. (anders ausgedrückt), eine quadratische Form in diesen Variablen,

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2\right) + a_{12}\, x_1x_2 + a_{13}\, x_1x_3 + a_{23}\, x_2x_3\,,$$

mit irgendwelchen Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

a) Wie lautet die Bedingung für einen stationären Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)$ von p?

b) Zeigen Sie: $x = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ ist ein stationärer Punkt von p. Ist dieser immer eindeutig?

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $H(x)$ zu $p(x)$ und schreiben Sie die Taylor-Entwicklung von $p(x)$ bezüglich der Stelle $x = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ an: $p(x) = p(\mathbf{0}) + \nabla p(\mathbf{0}) \cdot x + \frac{1}{2}\,(H(\mathbf{0}) \cdot x) \cdot x$. Fehlt hier noch ein Restglied?

6. Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung bis inkl. dem 2. Glied an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2}\,(H(x) \cdot h) \cdot h + O(||h||^3)$$

für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\; f(x) = x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3$.

7. Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung bis inkl. dem 2. Glied für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = y\, \ln x + x\, e^{y+2}$$

bezüglich der Stelle $(x_0, y_0) = (\frac{1}{e}, -1)$.

8. [ein früheres Prüfungsbeispiel]

Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 + (x-1)(y-1) + y^3$$

und bestimmen Sie deren Typ.

9. Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $y(t) = a\,t + b$ an die Funktion e^t in folgendem Sinn bestmöglich angepasst ist:

$$\varphi(a, b) := \int_0^1 \left(a\,t + b - e^t\right)^2 dt \quad \to \quad \text{minimal.}$$

Es handelt sich also um ein Minimierungsproblem für die Funktion $\varphi(a, b)$. Bestimmen Sie den (eindeutigen) stationären Punkt von φ und zeigen Sie, dass er eine globale Minimalstelle von φ darstellt.

Hinweis: $\varphi(a, b)$ ist eine sehr einfache Funktion. Verifizieren Sie, dass die Hesse-Matrix von φ konstant ist. Alle Punkte $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ haben den gleichen Typ (welchen?).

10. Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ e^{x_1 + x_2} - 1 \end{pmatrix},$$

mit $f(0, 0) = (0, 0)$.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Df(x)$ von f, insbesondere an der Stelle $(x) = (0, 0)$. Verifizieren Sie, dass $Df(0, 0)$ regulär ist.

b) Aus der Regularität von $Df(0, 0)$ folgt die lokale Invertierbarkeit von f in einer Umgebung der Stelle $(0, 0)$ (Satz 1.15). Geben Sie die Jacobi-Matrix $Df^{-1}(0, 0)$ der lokalen Inversen $f^{-1}(y)$ an der Stelle $y = (0, 0)$ an, ohne die lokale Inverse $f^{-1}(y)$ explizit zu bestimmen.