**1.** a) Beweisen Sie die Produktregel und die Quotientenregel für Skalarfelder,

$$\nabla(fg) = g\,\nabla f + f\,\nabla g, \qquad \nabla\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{g\,\nabla f - f\,\nabla g}{g^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

b) Beweisen Sie die Produktregel für vektorwertige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ einer reellen Variablen $t$,

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\cdot g(t)\big) = f'(t)\cdot g(t) \,+\, f(t)\cdot g'(t)$$

c) Sei $x(t)$ eine differenzierbare vektorwertige Funktion der reellen Variablen $t$; $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Geben Sie eine Formel für die Ableitung $\frac{d}{dt}\,\|x(t)\|$ der Norm von $x(t)$ an (als Ausdruck in $x(t)$ und $x'(t)$; $x(t) \neq 0$).

*Hinweis:* Kettenregel. Berechnen Sie zunächst $\frac{d}{dt}\,\|x(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\big(x(t)\cdot x(t)\big)$.

**2.** [Fortsetzung von Aufgabe 1:] Die vektorwertige Funktion $x(t)$ sei eine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $x'(t) = A\cdot x(t),\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Geben Sie eine Formel für die Ableitung $\frac{d}{dt}\,\|x(t)\|$ der Norm von $x(t)$ an, indem Sie das Ergebnis aus Aufgabe 1, c) mit dem Bestehen der Differentialgleichung für $x(t)$ kombinieren. Wie lautet der betreffende Ausdruck für $\frac{d}{dt}\,\|x(t)\|$ in Abhängigkeit von $x(t)$ und $A$?

*Hinweis:* Berechnen Sie zunächst $\frac{d}{dt}\,\|x(t)\|^2$.

b) Sei $A = -A^T$ schiefsymmetrisch. Zeigen Sie: $\frac{d}{dt}\,\|x(t)\| \equiv 0$.

*Hinweis:* Beachten Sie die fundamentalen Rechenregeln $x\cdot y = y\cdot x$ und $(A\cdot x)\cdot x = x\cdot(A^T\cdot x)$ aus der Linearen Algebra.

c) [vgl. 'Praktische Mathematik I', Abschnitt 5.3:] Schreiben Sie die Differentialgleichung für den frei schwingenden ungedämpften harmonischen Oszillator,

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

durch geeignete Wahl der Variablen $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ als System erster Ordnung $\dot{x}(t) = \Omega\cdot x(t)$ um, so dass die entstehende Systemmatrix $\Omega$ schiefsymmetrisch ist. Die gemäß b) geltende Eigenschaft '$d\,\|x\|^2 = 0$', d.h. $\frac{d}{dt}\,\|x(t)\|^2 \equiv 0$, hat dann genau die Bedeutung der Energieerhaltung.

**3.** *Eine Ergänzung zum Thema Matrixnormen (siehe Definition 1.22):*

a) Zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ repräsentieren lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ bzw. von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^n$. Das Matrixprodukt $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$ repräsentiert die Hintereinanderausführung dieser beiden Abbildungen $(A\circ B)$, eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$$

*Hinweis:* Gemäß Definition von $\|A\|$ gilt $\|A\,x\| \leq \|A\|\,\|x\|$ für alle $x$.

b) (∗) Sei $\|x\|_\infty$ die Maximumnorm im $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq n} |x_j|$ (vgl. UE 1). Für eine Matrix $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichne $\|A\|_\infty$ die zugehörige Matrixnorm (Abbildungsnorm).

Beweisen Sie die explizite Darstellung für $\|A\|_\infty$ ('Zeilensummennorm'),

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst $\|A\,x\|_\infty \leq \|A\|_\infty\,\|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie sodann einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ an, für den das Gleichheitszeichen angenommen wird. Betrachten Sie dazu die $i_{max}$ - te Zeile von $A$, wobei $i_{max}$ denjenigen Index $i$ bezeichnet, für den das Maximum in $\|A\|_\infty$ angenommen wird. Dann setzen Sie an: $x = (\pm1, \pm1, \ldots, \pm1)$ und wählen die einzelnen Vorzeichen in geeigneter Weise in Abhängigkeit von der $i_{max}$ - ten Zeile von $A$.

*Anmerkung:* In ähnlicher Weise zeigt man für $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ :

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

('Spaltensummennorm').

c) Im Gegensatz zu $\|A\|_\infty$ und $\|A\|_1$ ist die Berechnung von $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$ eine aufwendige Angelegenheit (Wurzel aus dem größten Eigenwert von $A^TA$). Es gilt jedoch folgende nützliche Ungleichung: [1]

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_\infty \, \|A\|_1}$$

Beweisen Sie diese Ungleichung.

*Hinweis:* Für den größten Eigenwert $\rho = \rho(A^TA)$ von $A^TA$ mit zugehörigem Eigenvektor $x$ gilt $\|A^TA\,x\|_1 = \|\rho\,x\|_1 = \rho\,\|x\|_1$, und daher $\rho \le \|A^TA\|_1$ . Schließen Sie weiter unter Verwendung von a) und b).

d) 'Verifizieren' Sie die unter c) angegebene Ungleichung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**4.** Zeigen Sie, dass folgende Funktion an der Stelle $(x,y,z) = (0,0,0)$ lokal invertierbar ist und geben Sie die Jacobi-Matrix der lokalen Inversen $f^{-1}$ an der Stelle $f(0,0,0)$ an:

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (A-I)\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\,e^{yz} \\ y\,e^{zx} \\ z\,e^{xy} \end{pmatrix}$$

($A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar, $I$ = Einheitsmatrix).

**5.** [1.1.33] Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^2 - 14\,x - 5\,y$$

die Lösung des Problems $\nabla f(x,y) = (0,0)$ (Bedingung für stationären Punkt) zu approximieren. Verwenden Sie den Startwert $(x_0,y_0) = (0.8, 2.1)$ und führen Sie zwei Iterationsschritte durch.

**6.** Wenn man ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x)\,g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen löst, erhält man eine *implizite* Darstellung für die Lösung $y = y(x)$ in der Gestalt

$$\varphi(x,y) = 0\,,$$

mit einer gewissen Funktion $\varphi(x,y)$, ein sogenanntes *erstes Integral* der Differentialgleichung (vgl. 'Praktische Mathematik I', Kapitel 5). D.h., für jede Lösung $y(x)$ muss gelten $\varphi(x_0,y_0) = 0$ und $\varphi(x,y(x)) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0,y_0)$.

a) Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass die Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems in einer Umgebung des Anfangswertes $(x_0,y_0)$ tatsächlich existiert und eindeutig definiert ist.

b) Konkretes Beispiel: Für $y' = y^5$, $y(0) = 1$ erhält man mittels der Methode der Separation der Variablen die implizite Lösungsdarstellung

$$(1-4\,x)\,y^4 = 1$$

Ist die Lösung $y(x)$ existent und lokal eindeutig definiert (Antwort mit Hilfe von a)!) ?

c) Geben Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Lösung $y(x)$ zu b) bezüglich der Stelle $x_0 = 0$ an, ohne die explizite Darstellung der Lösung $y(x)$ zu verwenden.

*Anmerkung:* Man bedenke, dass man bei komplizierteren Beispielen die explizite Lösung oft gar nicht anschreiben kann. Man kann jedoch gemäß c) implizit Taylor-entwicklen und die Lösung in dieser Weise lokal approximieren.

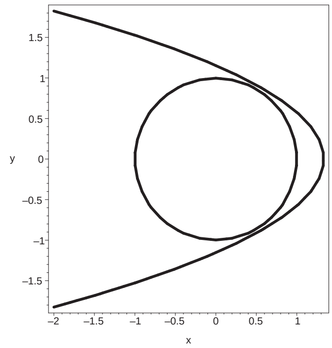
**7.** [ Prüfungsaufgabe (2011) ] Ein Asteroid rast entlang einer parabolischen Bahn knapp an einem Planeten vorbei. Wir betrachten das Ganze zweidimensional, der Planet entspricht der Einheitskreisscheibe $\{(x,y)\colon\ x^2+y^2 = 1\}$, und die Asteroidenbahn sei gegeben durch die Gleichung $3\,x + 3\,y^2 = 4$.

---

[1] Dies ist eine Verallgemeinerung der elementaren Ungleichung $\|x\|_2 \le \sqrt{\|x\|_\infty \, \|x\|_1}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ .

Die Frage: An welchen Positionen $(x, y)$ kommt der Asteroid dem Planeten am nächsten? Oder trifft er ihn doch?

(Laut Skizze hoffentlich knapp daneben.)



a) Zeigen Sie: Der Asteroid fliegt tatsächlich vorbei.

b) Formulieren Sie das Annäherungsproblem als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung.

c) Bestimmen Sie Positionen $(x, y)$ der planetennächsten Bahnpunkte mit Hilfe des Lagrange-Formalismus.

d) Wie nahe kommt der Asteroid an den Planeten heran (Minimalabstand)?

**8.** Gesucht sind die Extremalstellen der quadratischen Form $f(x, y) = 3\,x^2 - 2\,x\,y + y^2$ auf der Kreisscheibe $\{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

a) Bestimmen Sie zunächst alle lokalen Extremalstellen von $f$ im Inneren der Kreisscheibe.

b) Bestimmen Sie sodann die Extremalstellen von $f$ entlang der Kreislinie $\{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$ mittels der Methode von Lagrange. Stellen Sie das entsprechende Gleichungssystem auf und zeigen Sie, dass dies auf ein Eigenwertproblem führt. Wie hängt die Matrix $A$ dieses Eigenwertproblems mit $f$ zusammen?

Lösen Sie das Eigenwertproblem. Welche Bedeutung haben Eigenwerte und Eigenvektoren für die Lösung des Extremalproblems?

c) Um festzustellen, ob man Minima oder Maxima gefunden hat, untersucht man die Funktion $g(\varphi) = f(\cos\varphi, \sin\varphi)$ auf $[0, 2\pi]$. Wir begnügen uns hier mit einem Plot (am Rechner leicht zu erstellen). Anhand dieses Plots erkennt man, dass lokale Minima entlang der Kreislinie dem kleineren Eigenwert und lokale Maxima dem größeren Eigenwert entsprechen.

d) Schließen Sie aus a) und b) auf die globalen Minima und Maxima von $f$ auf der Kreisscheibe.

*Anmerkung:* Ganz allgemein führt zum Beispiel ein Extremalproblem für eine quadratische Form $f(x) = (A \cdot x) \cdot x\ \ (A = A^T)$ entlang der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x\| = 1\}$ auf ein Eigenwertproblem für die Matrix $A$. Es lassen sich dann Maximalstellen, Minimalstellen und Sattelpunkte mit Hilfe der Eigenstruktur von $A$ charakterisieren.

**9.** Durch die Gleichung

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - x\,y = 0$$

ist in impliziter Weise eine Kurve in der Ebene definiert.

a) Verifizieren Sie: $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist ein singulärer Punkt.

b) Es gilt $f(x, y) = f(y, x) = f(-x, -y) = f(-y, -x)$. Welche 'Symmetrieeigenschaften' folgen daraus für die Kurve?

c) Um das lokale Verhalten, d.h. die Natur des singulären Punktes zu verstehen, kann eine Taylor-Entwicklung hilfreich sein. Untersuchen Sie daher das Verhalten der Kurve $T_2(x, y) = 0$ an der Stelle $(0, 0)$, wobei $T_2(x, y)$ = Taylor-Polynom 2. Grades von $f$ an $(0, 0)$.

d) Wählen Sie Polarkoordinaten, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, setzen Sie in die Gleichung der Kurve ein, und lösen Sie nach $r$ auf. Das funktioniert, und Sie erhalten Sie eine explizite Darstellung der Kurve in der Form $r = r(\varphi)$ = Funktion von $\varphi$. Überlegen Sie, wie diese Darstellung genau aussieht, und verwenden Sie diese dazu, um die Kurve qualitativ halbwegs richtig zu skizzieren. (Sie können auch den Computer zu Hilfe nehmen.)

*Anmerkung:* Eine Parameterdarstellung der Kurve ergibt sich dann aus $x = r(\varphi)\cos\varphi,\ \ y = r(\varphi)\sin\varphi$.

**10.** [1.1.41] Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$(x^2 + y^2)\,\sin(2t) - 2\,x\,y = 0$$
$$(x^2 + y^2)\,\sin t - x\,\sin t - y = 0$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, t_0) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$ nach $(x, y)$ aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie für derart implizit definierte Kurve $(x(t), y(t))$ die Tangente an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 1)$.