(Aufgabe 1,2 zu VO Kapitel 1; Rest zu VO Kapitel 2, Stoff der VO vom 23.–25.4.)

1. siehe Beispiel 1.1.45 im Übungsskriptum (siehe Anhang)

2. s. Bsp. 1.1.46

3. s. Bsp. 1.3.3

4. s. Bsp. 1.3.4

5. s. Bsp. 1.3.6

6. s. Bsp. 1.3.8

7. Gegeben sei die Integralgleichung $x = Kx$ auf $B = (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$, wobei $K : B \to B$ definiert als

$$(Kx)(t) := 1 - 3 \int_0^t s^2\, x(s)\, \mathrm{d}s, \qquad 0 \le t \le T.$$

a) Zeigen Sie: Für Intervalllänge $T < 1$ ist der Integraloperator K eine Kontraktion auf B, d.h. es gilt

$$\|Kx - Ky\|_\infty \le L\, \|x - y\|_\infty \quad \text{mit} \quad L < 1.$$

b) Führen Sie zwei Schritte der Fixpunktiteration $x_\nu := Kx_{\nu-1}$ durch $(\nu = 1, 2)$ ausgehend von $x_0(t) \equiv 1$.

8. Es sei X ein vollständiger normierter Raum und $\varphi : X \to X$ eine (globale) Kontraktion, d.h. es existiere eine Lipschitz-Konstante $L < 1$ mit

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le L\, \|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in X$ mit $\varphi(x^*) = x^*$, und unabhängig vom Startwert $x_0 \in X$ konvergiert die Iteriertenfolge $x_\nu := \varphi(x_{\nu-1})$ gegen x^*. Zeigen Sie, dass insbesondere gilt

$$\|x_\nu - x^*\| \le L\, \|x_{\nu-1} - x^*\|,$$

sowie die beiden, bei Kenntnis von L explizit berechenbaren Fehlerabschätzungen

$$\|x_\nu - x^*\| \le \frac{L}{1-L}\, \|x_\nu - x_{\nu-1}\| \le \frac{L^\nu}{1-L}\, \|x_1 - x_0\|.$$

9. Berechnen Sie die Norm $\|f\|$ des linearen Funktionals f, wobei $f : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x(t)$ mit fest gewähltem $t \in [a,b]$,
b) $f(x) = \frac{1}{2}(x(a) + x(b))$,
c) $f(x) = \int_a^b x(t)\, \mathrm{d}t$.

10. Berechnen Sie die Operatornorm $\|F\|$, wobei $F : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$:

a) $F(x)(t) = \alpha\, x(t) + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
b) $F(x)(t) = \int_a^t x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

1.1.45 Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

unter der Nebenbedingung $xyz = 1$.

1.1.46 Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin x \sin y$$

unter der Nebenbedingung $x + y = \pi$; $x \geq 0$, $y \geq 0$.

1.1.47 Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = 5x + y - 3z,$$

unter der Nebenbedingung, die als Schnitt der folgenden Flächen gegeben ist: Einheitssphäre und jene Ebene durch den Koordinatenursprung, welche auf den Vektor $(1, 1, 1)^T$ normal steht.

1.1.48 Auf der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 100$ seien die beiden Punkte $A = (-8, -3)$ und $B = (8, 3)$ gegeben. Finden Sie einen Punkt $C = (x_C, y_C)$ auf der Ellipse, sodass der Flächeninhalt des innerhalb der Ellipse liegenden Dreiecks ABC maximal wird.

1.1.49 Δ Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

und die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = ax + by - c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie die Nullstellen des Gradienten von $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

1.1.50 Δ Wie oben aber für

$$f(x, y) = ax + by, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

und $\varphi(x, y) = x^\alpha y^\beta - \gamma = 0$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

1.2 Mehrdimensionale Integration

1.2.1 * Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(y)}dy\right) \geq 1$$

1.3 Banachräume, Hilberträume

1.3.1 Zwei Metriken heißen äquivalent, wenn jede Kugel bezüglich der einen Metrik eine Kugel bezüglich der anderen Metrik enthält. Sei $d(x, y)$ eine Metrik. Zeigen Sie, dass dann

$$d'(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine äquivalente Metrik zu $d(x, y)$ ist.

Bemerkung: $d'(x, y)$ ist beschränkt.

1.3.2 Einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ entspricht eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$. Für gegebene Normen auf $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildungsnorm $\|A\|$ dieser Abbildung definiert als das maximale Streckungsverhältnis $\|Ax\|/\|x\|$. Für die Vektorraumnormen $\|.\|_\rho$, $\rho = 1, 2, \infty$ ergibt dies konkret

$$\|A\|_\rho := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\rho}{\|x\|_\rho} = \max_{\|x\|_\rho=1} \|Ax\|_\rho.$$

(a) Gegeben sei die Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $\|A\|_\rho$, $\rho = 1, 2, \infty$ auf folgende Weise:

(i) Zeichnen Sie im $\mathbb{R}^2$ das Bild der Einheitssphäre $A(S_\rho)$, $\rho = 1, 2, \infty$.

(ii) Finden Sie die kleinste „Kugel“ (bezüglich der entsprechenden Norm) die das Bild $A(S_\rho)$ ganz enthält. Ihr „Radius“ ist $\|A\|_\rho$.

(b) Zeigen Sie: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.3}$$

Hinweis: Zeigen Sie:

– $\|A\|_\infty = \max\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

– $\exists\, x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^0\|_\infty = 1$ und $\|Ax^0\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

1.3.3 Prüfen Sie, ob

$$\begin{array}{lll} (1) & \|f\| := & \max\limits_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \\ (2) & \|f\| := & \max\limits_{0\leq x\leq 1} (|f(x)| + |f'(x)|) \end{array}$$

eine Norm in $C^1[\,0, 1\,]$ definiert, wobei

$$C^1[0, 1] := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R};\ f \text{ einmal stetig differenzierbar}\}.$$

1.3.4 Wir betrachten die normierten Räume

$$(C[a,b], \|.\|_\infty), \quad \|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|,$$

$$(C[a,b], \|.\|_1), \quad \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|dx,$$

wobei $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ stetig}\}$ ist. Für $[a,b] = [-2,2]$ sei die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt definiert:

$$f_n(x) := \begin{cases} -1, & x \le -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1, & x \ge \frac{1}{n}, \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Folge

(a) eine Cauchy–Folge bezüglich $\|.\|_1$ aber

(b) keine Cauchy–Folge bezüglich $\|.\|_\infty$ ist. Berechnen Sie weiters die Grenzfunktion bzgl. $\|.\|_1$.

1.3.5 * Sei $f \in C[0,1]$ und $|\varrho| < 1$. Mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes zeige man, dass die Integralgleichung

$$x(t) = f(t) + \varrho \int\limits_0^1 \sin(t + x(s))\, ds$$

eine eindeutige Lösung $x \in C[0,1]$ besitzt.

1.3.6 * Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $b \in B$ und $K\!:\!B \to B$ eine lineare Abbildung mit

$$\|K\| := \sup_{\|x\|\le 1} \|Kx\| < 1.$$

Man zeige, dass die Gleichung $x = Kx + b$ eine eindeutige Lösung hat, die durch die *Neumannreihe*

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} K^j b$$

gegeben ist.

1.3.7 (a) Führen Sie n Schritte der Picarditeration zur Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = \lambda x, \quad x(0) = 1 \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

durch. Vergleichen Sie die n-te Näherungslösung $x_n(t)$ mit der exakten Lösung.

(b) Führen Sie 4 Schritte der Picarditeration zur Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = -2x + t, \quad x(0) = 3$$

durch.

1.3.8 Der Raum

$$l^\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

mit der Norm $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ist ein Banachraum. Der Operator $T : l^\infty \to l^\infty$ wird definiert durch

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right).$$

Ist diese Abbildung linear, stetig, surjektiv, injektiv bzw. invertierbar? Ist die inverse Abbildung linear bzw. stetig?

1.3.9 Untersuchen Sie die Funktionenfolge $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ auf den Intervallen $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $[0,1]$, $[0,2]$, $[0,\infty)$ auf

(a) punktweise Konvergenz

(b) gleichmäßige Konvergenz

(c) Konvergenz in L^2

1.3.10 Es sei

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{e^{-nx}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Zeigen Sie, dass $f_n \in L^1([0,\infty))$ gilt und untersuchen Sie die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz in $(L^1([0,\infty)), \|.\|_{L^1})$.

1.3.11 Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit der $\|.\|_\infty$-Norm. Es sei A eine $n \times n$ Matrix mit der Eigenschaft

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Für $b \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die lineare Abbildung $Tx := Ax + b$. Zeigen Sie:

(a) T ist eine Kontraktion

(b) die Fixpunktgleichung $Tx = x$ hat eine eindeutige Lösung, die iterativ berechnet werden kann.

1.3.12 Für $0 < b < 1$ betrachten wir die Integralgleichung

$$x(t) = 1 - 2\int_0^t s x(s)\, ds, \quad t \in [0, b].$$