1. a) Geben Sie alle Lösungen $z_{n,0}, \dots, z_{n,n-1} \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

an. Diese nennt man komplexe Einheitswurzeln; $z_{n,0} = 1$ ist immer eine Lösung. Machen Sie auch eine Skizze für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Zeigen Sie:

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_{n,j} = \begin{cases} n, & j = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Fortsetzung von Aufgabe 1:

a) Man schreibt die $z_{n,j}$ meist in der Form $z_{n,j} = \omega_n^j$ mit $\omega_n = \dots$? Zeigen Sie: Alle Koeffizienten der Matrix $W_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

$$W_n = \begin{pmatrix} \omega_n^0 & \omega_n^0 & \omega_n^0 & \dots & \omega_n^0 \\ \omega_n^0 & \omega_n^1 & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \omega_n^0 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^0 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

sind komplexe Einheitswurzeln.

b) Stellen Sie die die Hermite'sch transponierte (= transponierte + komplex konjugierte) Matrix W_n^* in einer zu W_n analogen Form dar. Dabei ersetzt man einfach ω_n durch …(finden Sie es heraus).

Hinweis: Sie können auch einfach nur einen Spezialfall betrachten, z.B. $n = 4$. Das ist einfacher hinzuschreiben, aber der allgemeine Fall funktoniert analog. [1]

3. [1.4.9] Bestimmen Sie eine gebrochen lineare Transformation der Gestalt

$$w(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

so, dass

$$w(-i) = 1, \quad w(0) = i, \quad w(i) = 1$$

gilt. In welche Kurve wird durch diese Abbildung die imaginäre Achse übergeführt?

4. Charakterisieren Sie anhand einer Skizze das Verhalten der Funktion $w = f(z) = z^3$ und geben Sie die drei Zweige der Umkehrfunktion $z = f^{-1}(w)$ an. Wählen Sie den Hauptzweig so, dass er eine Erweiterung der reellen Funktion $\sqrt[3]{x}$ darstellt. Schreiben Sie die drei Zweige explizit formelmäßig an, inklusive deren Definitionsbereiche.

5. [1.4.14] Die Regel von de l'Hospital gilt auch im Komplexen. Verwenden Sie diese dazu, um folgende unbestimmte Ausdrücke auszuwerten:

$$\text{a)} \quad \lim_{z\to 2\,i} \frac{z^2+4}{2\,z^2+(3-4\,i)z-6\,i}\,, \qquad \text{b)} \quad \lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$$

[1] Anmerkung: W_n ist die Matrix der sogenannten diskreten Fouriertransformation, eine Art endliche diskrete Fourierreihe für endlich viele Funktionsdaten f_j zu äquidistanten Stellen $x_j = 2\,j\pi/n$. Man kann nachrechnen, dass W_n unitär ist, d.h. es gilt $W_n^*\,W_n = I_n$. W_n^* ist die Matrix, die die Rücktransformation realisiert.

6. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Durch die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \ln n \, z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

ist eine komplexe Funktion definiert, soferne die Reihe konvergiert. Wie lautet ihr Konvergenzradius?

Hinweis: Es gilt $\ln(n+1) \leq \ln n + \frac{1}{n}$ (dies zeigt man in einfacher Weise mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung oder der Integralrechnung aus Analysis I).

7. Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ besitzt den Konvergenzradius $R = 1$, und für $|z| < 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \, .$$

Im Inneren ihres Konvergenzgebietes stellt eine konvergente Potenzreihe eine komplex differenzierbare Funktion dar, und ihre Ableitung wird durch die gliedweise differenzierte Reihe dargestellt. Verwenden Sie diese Tatsache dazu, um den Wert der verallgemeinerten geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, z^n, \quad |z| < 1$$

zu berechnen.

Anmerkung: Vgl. Übung Analysis I, WS 2011/12, Aufgabe 3.1. Die hier verwendete Methode ist einfacher, und sie funktioniert in gleicher Weise (mit etwas mehr Rechenaufwand) zu Berechnung von $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \, z^n, \quad |z| < 1, \quad k \in \mathbb{N}$, mittels k-facher gliedweise Differentiation der geometrischen Reihe. (Für kleinere Werte von k geht es relativ einfach; Sie können es z.B. auch für $k = 2$ versuchen.)

8. Verwenden Sie die Substitution $z = e^{i\,x}$ dazu, um das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} (\cos x)^4 \, dx$$

in ein komplexes Kurvenintegral einer rationalen Funktion $R(z)$ umzuschreiben. Geben Sie $R(z)$ der Form $R(z) = P(z)/Q(z)$ an (P, Q komplexe Polynome).

Anmerkung: Wie man ein derartiges rationales Integral in einfacher Weise berechnet, wird in der VO später besprochen (Abschnitt 3.7).

9. a) Sei $f(z)$ eine komplex differenzierbare Funktion, $z_0 \in \mathbb{C}$, und $r > 0$. Beweisen Sie die Mittelwerteigenschaft

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\,\pi} f(z_0 + r \, e^{i\,\varphi}) \, d\varphi \, .$$

b) Verwenden Sie a) dazu, um das reelle bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \, dx$$

zu berechnen. (Anmerkung: Die Stammfunktion des Integranden ist nicht elementar bestimmbar.)

10. Testaufgabe (SS 2008): Gegeben sei das Integral

$$\oint_C \frac{2\,z^3 - 3}{2\,i - \frac{z}{i}} \, dz,$$

wobei $C = \{z \in \mathbb{C} : \, |z+2| = 1\}$ (positive Orientierung).

a) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung der Kreislinie C.

b) Die Aufgabe lässt sich einfacher lösen, ohne die Integration wie unter a) explizit auszuführen. Zeigen Sie, wie das geht.