Institut für Analysis und Scientific Computing TU Wien
W. Auzinger, E. Weinmüller SS 2013

A N A L Y S I S II F Ü R T P H, U E (103.091)

Test 1 (DI, 07.05.2013) / Gruppe 1 ***(mit Lösung)***

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon [0,\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y)=\cos(x)\,e^{-\sin(y)}}$ *a): 3 P.*

(i) Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y).

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung im Punkt $(\frac{\pi}{4},\pi)$ an.

(i) $\nabla f(x,y) = e^{-\sin(y)}\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\cos(y)\cos(x)\end{pmatrix}$

$H(f)(x,y) = e^{-\sin(y)}\begin{pmatrix} -\cos(x) & \sin(x)\cos(y) \\ \sin(x)\cos(y) & \cos(x)(\cos(y)^2+\sin(y))\end{pmatrix}$

(ii) $T_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{4} \\ y-\pi\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4},\ \ y-\pi\right)\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{4} \\ y-\pi\end{pmatrix}$

b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f und geben Sie an welchen Typ diese Punkte haben. Handelt es sich um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte? *b): 3 P.*

$\nabla f(x,y) = e^{-\sin(y)}\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\cos(y)\cos(x)\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(x)=0, \cos(y)=0$ mit $x,y\in[0,\pi]$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$: $H(0,\frac{\pi}{2}) = e^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ hyperbolisch, da regulär und indefinit, daher Sattelpunkt.

$\begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$: $H(\pi,\frac{\pi}{2}) = e^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ebenfalls Sattelpunkt.

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:$ $\boxed{g(x,y) = e^x + e^y + \sin(x) + \cos(y) - 3}$ *a): 3 P.*

(i) Lässt sich die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal um $(\xi,\eta) = (0,0)$ nach y auflösen? Begründung!

(ii) Entwickeln Sie die Auflösungsfunktionen (falls diese existiert) in einer Taylorreihe bis zum quadratischen Term.

(i)

(a) $g(0,0) = 1 + 1 + 0 + 1 - 3 = 0$

(b) $\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y) = \left(e^x + \cos(x), \quad e^y - \sin y\right)$

Komponenten von $\nabla g(x,y)$ sind als Kompositionen stetiger Funktionen stetig.

(c) $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$ Alle Voraussetzungen für das Implizite-Funktionen-Theorem sind erfüllt!

(ii) $T_y(s) = y(0) + \frac{dy}{dx}(0)s + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(0)s^2$

$y(0) = 0$

$\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}(0,0) = -\frac{e^0+\cos(0)}{e^0-\sin(0)} = -\frac{2}{1} = -2$

$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+\cos(x)}{e^y-\sin(y)}\right)\Big|_{(0,0)} = -\frac{(e^x-\sin(x))(e^y-\sin(y))-(e^x+\cos(x))(e^y-\cos(y))\frac{dy}{dx}(x)}{(e^y-\sin(y))^2}\Big|_{(0,0)} = -1$

$\Rightarrow$ Die Taylorreihe bis zum quadratischen Glied ist gegeben durch:

$T_y(s) = -2s - \frac{1}{2}s^2.$

b) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $\boxed{f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \end{pmatrix}}$ *b): 3 P.*

(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

(ii) Entwickeln Sie f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ koordinatenweise in eine lineare Taylorreihe.

(iii) Geben Sie die Punkte an bei denen f keine differenzierbare lokale Inverse besitzt.

(iv) Besitzt f dennoch eine stetige globale Inverse? Falls ja, geben Sie diese an.

(i) $\frac{\partial f}{\partial x,y}(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x-1)^2 & 0 \\ 0 & 3(y+2)^2 \end{pmatrix}$

(ii) $T_1(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3x \\ 27y \end{pmatrix}$

(iii) f besitzt auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 1 \vee y = -2)\}$ keine differenzierbare Inverse.

(iv) f besitzt eine stetige globale Inverse. Es sei $(u,v)^T := f(x,y) = ((x-1)^3, (y+2)^3)^T$. Dann ist $(x,y)^T = f^{-1}(u,v) = (u^{\frac{1}{3}} + 1, v^{\frac{1}{3}} - 2)^T$.

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\boxed{f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + 3yx + 2z^2 \\ x + 3y^5 \end{pmatrix}}$ *a): 3 P.*

(i) Bestimmen Sie, ob sich das System $\boxed{g(x,y,z) := f(x,y,z) - f(1,1,1) = \begin{pmatrix} x^2 + 3yx + 2z^2 - 6 \\ x + 3y^5 - 4 \end{pmatrix}}$ im Punkt $(\xi,\eta,\zeta) = (1,1,1)$ lokal nach (x,z) auflösen lässt.

(ii) Bestimmen Sie ob, sich das System $\boxed{g(x,y,z) := f(x,y,z) - f(1,1,0) = \begin{pmatrix} x^2 + 3yx + 2z^2 - 4 \\ x + 3y^5 - 4 \end{pmatrix}}$ im Punkt $(\xi,\eta,\zeta) = (1,1,0)$ lokal nach (y,z) auflösen lässt.

(i)

(a) $g(1,1,1) = f(1,1,1) - f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) f ist komponentenweise ein Polynom in x und y, daher stetig differenzierbar.

(c) $\det \frac{\partial f}{\partial(x,z)}(1,1,1) = \det \begin{pmatrix} 2x + 3y & 4z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |_{(1,1,1)} = -4 \neq 0$

Alle Voraussetzungen für das Implizite-Funktionen-Theorem sind erfüllt!

(ii)

(c) $\det \frac{\partial f}{\partial(y,z)}(1,1,0) = \det \begin{pmatrix} 3x & 4z \\ 15y^4 & 0 \end{pmatrix} |_{(1,1,0)} = 0$

Man kann die Beziehung $g(x,y,z) = 0$ in der Umgebung von $(\xi,\eta,\zeta) = (1,1,0)$ nicht nach (y,z) auflösen!

b) Gegeben seien die Funktionale $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *b): 3 P.*

$$\boxed{H(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2,}$$

und

$$\boxed{\phi(x,y) = x^2 + y^2.}$$

Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Extrema der Funktion H, unter der Nebenbedingung $\phi(x,y) = 1$.

(1) Untersuchung der stationären Punkte von ϕ ergibt, dass $\{(0,0)\}$ die Nullstelle des Gradienten von ϕ ist. Dieser Punkt erfüllt nicht die Nebenbedingung, daher gibt es keine singulären Punkte.

(2) $0 = \nabla(H + \lambda\phi)(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 6x + 2y + 2\lambda x \\ 2x + 6y + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4(x-y) + 2\lambda(x-y) = 0 \Rightarrow$
$(x-y)(4+2\lambda) = 0 \Rightarrow x = y \vee \lambda = -2;$

$$x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\},$$

$$\lambda = -2 \Rightarrow x = -y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

(3) Da die NB eine kompakte Menge ist, muss man nur noch H auswerten:

$$H\left(\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \Rightarrow \text{Maxima} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\},$$

$$H\left(\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \mp\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \Rightarrow \text{Minima} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Frage, ob es sich um Mimima oder Maxima handelt musste nicht beantwortet werden.