Institut für Analysis und Scientific Computing TU Wien
W. Auzinger, E. Weinmüller SS 2013

A N A L Y S I S I I F Ü R T P H, U E (103.091)

Test 1 (DI, 07.05.2013) / Gruppe 2 ***(mit Lösung)***

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon [0,\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y)=\sin(x)\,e^{-\cos(y)}}$ *a): 3 P.*

(i) Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y).

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung im Punkt $(\frac{\pi}{4},\pi)$ an.

(i) $\nabla f(x,y)=e^{-\cos(y)}\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\sin(y)\end{pmatrix}$

$H(f)(x,y)=e^{-\cos(y)}\begin{pmatrix}-\sin(x) & \cos(x)\sin(y)\\ \cos(x)\sin(y) & \sin(x)(\cos(y)+\sin(y)^2)\end{pmatrix}$

(ii) $T_2(x,y)=e(\frac{\sqrt{2}}{2}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\ y-\pi\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4} & y-\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{4}\\ y-\pi\end{pmatrix})$

b) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f und geben Sie an welchen Typ diese Punkte haben. Handelt es sich um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte? *b): 3 P.*

$\nabla f(x,y)=e^{-\cos(y)}\begin{pmatrix}\cos(x)\\ \sin(x)\sin(y)\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \sin(y)=0,\cos(x)=0$ mit $x,y\in[0,\pi]$

$\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\end{pmatrix}$: $H(\frac{\pi}{2},0)=e^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ hyperbolisch, da regulär und indefinit, daher Sattelpunkt.

$\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ \pi\end{pmatrix}$: $H(\frac{\pi}{2},\pi)=e\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ elliptisch, da negativ definit, daher Maximum.

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{g(x,y) = e^x - e^y + \sin(y) + \cos(y) - 1}$ *a): 3 P.*

(i) Lässt sich die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal um $(\xi,\eta) = (0,0)$ nach x auflösen? Begründung!

(ii) Entwickeln Sie die Auflösungsfunktionen (falls diese existiert) in einer Taylorreihe bis zum quadratischen Term.

(i)

(a) $g(0,0) = 1 - 1 + 0 + 1 - 1 = 0$

(b) $\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y) = \left(e^x, \quad -e^y + \cos(y) - \sin(y)\right)$

Komponenten von $\nabla g(x,y)$ sind als Komposition stetiger Funktionen stetig.

(c) $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1 \neq 0$ Alle Voraussetzungen für das Implizite-Funktionen-Theorem sind erfüllt!

(ii) $T_x(s) = x(0) + \frac{dx}{dy}(0)s + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dy^2}(0)s^2$

$x(0) = 0$

$$\frac{dx}{dy}(0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial x}}(0,0) = -\frac{-e^0+\cos(0)-\sin(0)}{e^0} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}(0) = -\frac{d}{dy}\left(\frac{-e^y+\cos(y)-\sin(y)}{e^x}\right)\Big|_{(0,0)} = -\frac{(-e^y-\sin(y)-\cos(y))(e^x)-(-e^y+\cos(y)-\sin(y))(e^x)\frac{dx}{dy}(x)}{(e^x)^2}\Big|_{(0,0)} = 2$$

$\Rightarrow$ Die Taylorreihe bis zum quadratischen Glied ist gegeben durch:

$T_x(s) = s^2$

b) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \\ y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \end{pmatrix}}$$

b): 3 P.

(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

(ii) Entwickeln Sie f im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$ koordinatenweise in eine lineare Taylorreihe.

(iii) Geben Sie die Punkte an bei denen f keine differenzierbare lokale Inverse besitzt.

(iv) Besitzt f dennoch eine stetige globale Inverse? Falls ja, geben Sie diese an.

(i) $\frac{\partial f}{\partial x,y}(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x-3)^2 & 0 \\ 0 & 3(y+1)^2 \end{pmatrix}$

(ii) $T_1(x,y) = \begin{pmatrix} -8 \\ 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x - 20 \\ 27y - 27 \end{pmatrix}$

(iii) f besitzt auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 3 \vee y = -1)\}$ keine differenzierbare Inverse,

(iv) f bestitzt eine stetige globale Inverse. Es sei $(u,v)^T := f(x,y) = ((x-3)^3, (y+1)^3)^T$.
Dann ist $(x,y)^T = f^{-1}(u,v) = (u^{\frac{1}{3}} + 3, v^{\frac{1}{3}} - 1)^T$.

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $\boxed{f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - 7yz + 2z^2 \\ z^2 + y^5 \end{pmatrix}}$ *a): 3 P.*

(i) Bestimmen Sie, ob sich das System $\boxed{g(x,y,z) := f(x,y,z) - f(1,1,1) = \begin{pmatrix} x^2 - 7yz + 2z^2 + 4 \\ z^2 + y^5 - 2 \end{pmatrix}}$ im Punkt $(\xi,\eta,\zeta) = (1,1,1)$ lokal nach (x,z) auflösen lässt.

(ii) Bestimmen Sie ob, sich das System $\boxed{g(x,y,z) := f(x,y,z) - f(1,0,1) = \begin{pmatrix} x^2 - 7yz + 2z^2 - 3 \\ z^2 + y^5 - 1 \end{pmatrix}}$ im Punkt $(\xi,\eta,\zeta) = (1,0,1)$ lokal nach (y,z) auflösen lässt.

(i)

(a) $g(1,1,1) = f(1,1,1) - f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) f ist komponentenweise ein Polynom, daher stetig differenzierbar.

(c) $\det \frac{\partial f}{\partial(x,z)}(1,1,1) = \det \begin{pmatrix} 2x & 4z - 7y \\ 0 & 2z \end{pmatrix} |_{(1,1,1)} = 4$

Alle Voraussetzungen für das Implizite-Funktionen-Theorem sind erfüllt!

(ii)

(a) $g(1,0,1) = f(1,0,1) - f(1,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) siehe (i)(b)

(c) $\det \frac{\partial f}{\partial(y,z)}(1,0,1) = \det \begin{pmatrix} -7z & 4z - 7y \\ 5y^4 & 2z \end{pmatrix} |_{(1,0,1)} = -14$

Alle Voraussetzungen für das Implizite-Funktionen-Theorem sind erfüllt!

b) Gegeben seien die Funktionale $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *b): 3 P.*

$$\boxed{H(x,y) = 9x^2 - 10xy + 9y^2,}$$

und

$$\boxed{\phi(x,y) = x^2 + y^2.}$$

Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Extrema der Funktion H, unter der Nebenbedingung $\phi(x,y) = 1$.

(1) Untersuchung der stationären Punkte von ϕ ergibt, dass $\{(0,0)\}$ die Nullstelle des Gradienten von ϕ ist. Dieser Punkt erfüllt nicht die Nebenbedingung, daher gibt es keine singulären Punkte.

(2) $0 = \nabla(H + \lambda\phi)(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 18x - 10y + 2\lambda x \\ -10x + 18y + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 8(x+y) + 2\lambda(x+y) = 0 \Rightarrow$
$(x+y)(8+2\lambda) = 0 \Rightarrow x = -y \vee \lambda = -4;$

$x = -y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\},$

$\lambda = -4 \Rightarrow x = y \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$

(3) Da die NB eine kompakte Menge ist, muss man nur noch H auswerten:

$H\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \Rightarrow \text{Minima} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\},$

$H\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 14 \Rightarrow \text{Maxima} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$

Die Frage, ob es sich um Mimima oder Maxima handelt musste nicht beantwortet werden.