

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 2 Gruppe A (Fr, 14.06.2013) (mit Lösung)

— Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

• **Aufgabe 1.**

Auf $[0, 1]$ sei das AWP

$$y'(t) = \frac{1}{2} \cos(t^2)y(t), \quad y(0) = 0 \quad (1)$$

gegeben. Die Lösung des AWP erfüllt auch die Integralgleichung

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \cos(s^2)y(s)ds,$$

d.h., y ist die Lösung einer Fixpunktgleichung

$$y(t) = K(y)(t) := \int_0^t \frac{1}{2} \cos(s^2)y(s)ds, \quad (2)$$

für den Operator K . Benützen Sie den Fixpunktsatz von Banach, um zu zeigen, dass (2) eine eindeutige stetige Lösung hat. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten, siehe a) und b).

- a) Sei B der Banachraum $B := (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass K den Banachraum B in sich abbildet, $K : B \rightarrow B$. D.h., ist y eine stetige Funktion auf $[0, 1]$, so ist auch $K(y)$ eine stetige Funktion auf $[0, 1]$. a): 3 P.

Sei $t_0, t \in (0, 1)$ und $x \in C[0, 1]$, dann gilt

$$\begin{aligned} & |K(x)(t) - K(x)(t_0)| = \\ & = \frac{1}{2} \left| \int_0^t \cos(s^2)x(s)ds - \int_0^{t_0} \cos(s^2)x(s)ds \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left| \int_{t_0}^t \cos(s^2)x(s)ds \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{t_0}^t \cos(s^2)|x(s)|ds \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left| \int_{t_0}^t |x(s)|ds \right| \leq \frac{1}{2} \|x\|_\infty |t - t_0| =: \frac{1}{2} M |t - t_0|. \end{aligned}$$

D.h., für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(t_0, \varepsilon)$ sodass für alle t mit $|t - t_0| < \delta$, $|K(x)(t) - K(x)(t_0)| < \varepsilon$ folgt. Daraus folgt, dass $K(x)(t)$ für alle Punkte $t_0 \in (0, 1)$ stetig ist.

Alternativ: $x(s) \cos(s^2)$ ist stetig, daher gilt der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und deshalb ist die Stammfunktion $K(x)(t)$ auf $(0, 1)$ differenzierbar. Damit ist sie auch auf $(0, 1)$ stetig. (Es gilt auch ganz allgemein, dass Funktionen der Form $g(x) = \int_0^x f(s)ds$ für ein stetiges f stetig sind.)

b) Zeigen Sie, dass K auf B eine Kontraktion ist.

b): 3 P.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } |K(g)(t) - K(h)(t)| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^t \cos(s^2)g(s) - \cos(s^2)h(s)ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t |\cos(s^2)g(s) - \cos(s^2)h(s)|ds \leq \frac{1}{2} \int_0^t |\cos(s^2)||g(s) - h(s)|ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t |g(s) - h(s)|ds \leq \frac{1}{2} \|g - h\|_\infty t \leq \frac{1}{2} \|g - h\|_\infty. \end{aligned}$$

Damit gilt $\|K(x) - K(y)\|_\infty := \max_{0 \leq t \leq 1} |K(g)(t) - K(h)(t)| \leq L \|g - h\|_\infty$, $L = \frac{1}{2} < 1$.

c) Was folgt daraus für die Lösung des AWP's (1)?

c): 1 Zusatzpunkt

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau eine stetige Lösung des Fixpunktproblems (2) und somit genau eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (1).

• **Aufgabe 2.**

Gegeben sei der Hilbertraum $H = (L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$, wobei

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad \langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Weiters sei ein Orthonormalsystem $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$.

- a) Überprüfen Sie ob $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich ein Orthonormalsystem ist. a): 2 P.
(Verwenden Sie dazu die Identität: $2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$.)

Für $n \geq 1$ gilt

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2nx)) dx = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1.$$

Für $n \neq m$ haben wir

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx)) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(nx - mx)}{n - m} - \frac{\sin(nx + mx)}{n + m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

b) Entwickeln Sie die 2π -periodische Funktion $g \in L^2(-\pi, \pi)$ definiert durch $g(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi]$, in eine Reihe bezüglich des oben definierten Orthonormalsystem. b): 2 P.

$$\begin{aligned} g(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \text{ wobei gilt: } c_n = \langle e_n, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{-\sin(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{-x \cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} \right) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi \cos(\pi n)}{n} \\ &= \frac{-2\pi}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

c) Was geschieht wenn man versucht eine gerade Funktion g (gerade bedeutet: $g(-x) = g(x)$ für jedes $x \in (-\pi, \pi]$) in eine Reihe bezüglich dieses Orthonormalsystems zu entwickeln? c): 2 P.

Sei $g \in L^2(-\pi, \pi)$ gerade, dann ist $g(x) \sin(nx)$ ungerade und die Stammfunktion gerade. Damit folgt $c_n = 0$, für alle n .

• **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

a): 2 P.

(Verwenden Sie dabei den Hauptzweig des Logarithmus)

(i) $\log\left(\frac{i}{2}\right)$

(ii) $\sqrt{1+2i}$

(iii) i^i

(i) $\log\left(\frac{i}{2}\right) = \ln(1/2) + i\frac{\pi}{2}$

(ii) $\sqrt{1+2i} = \sqrt{\sqrt{5}}\{e^{i\frac{\varphi}{2}}, e^{i\frac{\varphi}{2}+i\pi}\}, \varphi = \arctan(2)$

(iii) $i^i = \exp(i \log_0(i)) = \exp\left(\frac{\pi}{2}i^2\right) = \exp\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

b) Überprüfen sie wo die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, b): 2 P.

(i) $f(z) = x - iy, z = x + iy$

(ii) $g(z) = x^2 - y^2 + i2xy, z = x + iy$

(i) $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x - iy$. Alle partiellen Ableitungen von u und v existieren und sind stetig in \mathbb{R}^2 . Aber $u_x = 1 \neq v_y = -1$. Deshalb sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt und f nirgendwo komplex differenzierbar.

(ii) $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$. Alle partiellen Ableitungen von u und v existieren und sind stetig in \mathbb{R}^2 . Weiters gilt, $u_x = 2x = v_y = 2x, u_y = -2y = -v_x = -2y$. Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt in \mathbb{R}^2 und g auf ganz \mathbb{C} komplex differenzierbar.

c) Benutzen sie die Regel von de L'Hospital um folgende Grenzwerte zu berechnen.

c): 2 P.

Begründen Sie auch warum die Anwendung der Regel erlaubt ist.

(i) $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 e^{-2z}$

(ii) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)-1}{z^2}$

(iii) $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{\frac{1}{z}}$

Alle Zähler und Nenner sind zumindest in einer Umgebung des betrachteten Punktes analytisch!

(i) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{\exp(2z)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z}{2\exp(2z)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2}{4\exp(2z)} = 0$

(ii) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)-1}{z^2} = \frac{0}{0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin(z)}{2z} = \frac{0}{0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\cos(z)}{2} = \frac{-1}{2}$

(iii) $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{\frac{1}{z}} = \infty^0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\log_0(z)}{z}\right) = \exp\left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_0(z)}{z}\right)\right) = \exp\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \exp\left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1/z}{1}\right)\right) = \exp\left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z}\right)\right) = \exp(0) = 1$