Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 2 Gruppe B (Fr, 14.06.2013) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

Auf $[0,1]$ sei das AWP

$$y'(t) = \frac{1}{2}\sin(t)y(t), \quad y(0) = 0 \tag{1}$$

gegeben. Die Lösung des AWPs erfüllt auch die Integralgleichung

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{2}\sin(s)y(s)ds,$$

d.h., y ist die Lösung einer Fixpunktgleichung

$$y(t) = K(y)(t) := \int_0^t \frac{1}{2}\sin(s)y(s)ds, \tag{2}$$

für den Operator K. Benützen Sie den Fixpunktsatz von Banach, um zu zeigen, dass (2) eine eindeutige stetige Lösung hat. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten, siehe a) und b).

a) Sei B der Banachraum $B := (C[0,1], ||.||_\infty)$, der stetigen reelwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Zeigen Sie, dass K den Banachraum B in sich abbildet, $K : B \to B$. D.h., ist y eine stetige Funktion auf $[0,1]$, so ist auch $K(y)$ eine stetige Funktion auf $[0,1]$. *a): 3 P.*

Sei $t_0, t \in (0,1)$ und $x \in C[0,1]$, dann gilt

$|K(x)(t) - K(x)(t_0)| =$

$= \frac{1}{2}\left|\int_0^t \sin(s)x(s)ds - \int_0^{t_0} \sin(s)x(s)ds\right|$

$\leq \frac{1}{2}\left|\int_{t_0}^t |\sin(s)x(s)|ds\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{t_0}^t |\sin(s)||x(s)|ds\right|$

$\leq \frac{1}{2}\left|\int_{t_0}^t |x(s)|ds\right| \leq \frac{1}{2}||x||_\infty|t-t_0| =: \frac{1}{2}M|t-t_0|.$

D.h., für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(t_0,\varepsilon)$ sodass für alle t mit $|t-t_0| < \delta$, $|K(x)(t) - K(x)(t_0)| < \varepsilon$ folgt. Daraus folgt, dass $K(x)(t)$ für alle Punkte $t_0 \in (0,1)$ stetig ist.

Alternativ: $x(s)\sin(s)$ ist stetig, daher gilt der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und deshalb ist die Stammfunktion $K(x)(t)$ auf $(0,1)$ differenzierbar. Damit ist sie auch auf $(0,1)$ stetig. (Es gilt auch ganz allgemein, dass Funktionen der Form $g(x) = \int_0^x f(s)ds$ für ein stetiges f stetig sind.)

b) Zeigen Sie, dass K auf B eine Kontraktion ist. *b): 3 P.*

(ii) $|K(g)(t) - K(h)(t)| = \frac{1}{2}\left|\int_0^t \sin(s)g(s) - \sin(s)h(s)ds\right|$

$\leq \frac{1}{2}\int_0^t |\sin(s)g(s) - \sin(s)h(s)|ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t |\sin(s)||g(s) - h(s)|ds$

$\leq \frac{1}{2}\int_0^t |g(s) - h(s)|ds \leq \frac{1}{2}||g - h||_\infty t \leq \frac{1}{2}||g - h||_\infty.$

Damit gilt $\|K(x) - K(y)\|_\infty := \max_{0\leq t\leq 1}|K(g)(t) - K(h)(t)| \leq L||g - h||_\infty, \;\; L = \frac{1}{2} < 1.$

c) Was folgt daraus für die Lösung des AWPs (1)? *c): 1 Zusatzpunkt*

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau eine stetige Lösung des Fixpunktproblems (2) und somit genau eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (1).

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei der Hilbertraum $H = (L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$, wobei

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad \langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Weiters sei ein Orthonormalsystem $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ definiert durch $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), n \in \mathbb{N}$, $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

a) Überprüfen Sie ob $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich ein Orthonormalsystem ist. *a): 2 P.*

(Verwenden Sie dazu die Identität: $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$.)

Für $n \neq 0$ gilt

$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(2nx)+1)dx = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1,$

$\langle e_0, e_0 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1.$

Für $n \neq m$ und $n, m \neq 0$ haben wir

$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(nx+mx)+\cos(nx-mx))dx$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(nx+mx)}{n+m} + \frac{\sin(nx-mx)}{n-m}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

Für $n \neq m$ und $n \neq 0$ gilt

$\langle e_n, e_0 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

b) Entwickeln Sie die 2π-periodische Funktion $g \in L^2(-\pi, \pi)$ definiert durch $g(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi]$, in eine Reihe bezüglich des oben definierten Orthonormalsystem. *b): 2 P.*

$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$ wobei gilt: $c_n = \langle e_n, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx$ für $n \neq 0$ und $c_0 = \langle e_0, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx$.

Also, für $n \neq 0$, $c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$,

und $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}$.

c) Was geschieht wenn man versucht eine ungerade Funktion g (ungerade bedeutet: $g(-x) = -g(x)$ für jedes $x \in (-\pi, \pi]$) in eine Reihe bezüglich dieses Orthonormalsystems zu entwickeln? *c): 2 P.*

Sei $g \in L^2(-\pi, \pi)$ ungerade, dann ist $g(x) \cos(nx)$ ungerade und die Stammfunktion gerade. Damit folgt $c_n = 0$, für alle n.

- **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. *a): 2 P.*

(Verwenden Sie dabei den Hauptzweig des Logarithmus)

(i) $\log(\frac{i}{7})$

(ii) $\sqrt{2+i}$

(iii) 3^i

(i) $\log(\frac{i}{7}) = \ln(1/7) + i\frac{\pi}{2}$

(ii) $\sqrt{2+i} = \sqrt{\sqrt{5}}\{e^{i\frac{\varphi}{2}}, e^{i\frac{\varphi}{2}+i\pi}\}, \ \varphi = \arctan(1/2)$

(iii) $3^i = \exp(i\log_0(3)) = \exp(i\ln(3)) = \cos(\ln(3)) + i\sin(\ln(3))$

b) Überprüfen sie wo die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind, *b): 2 P.*

(i) $f(z) = x + iy$, $z = x + iy$

(ii) $g(z) = x^2 + y^2 + i2xy$, $z = x + iy$

(i) $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x + iy$. Alle partiellen Ableitungen von u und v existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$. Weiters gilt $u_x = 1 = v_y = 1$, $u_y = 0 = -v_x = 0$. Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt in $\mathbb{R}^2$ und f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

(ii) $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + y^2 + i2xy$. Alle partiellen Ableitungen von u und v existieren und sind stetig in $\mathbb{R}^2$. Weiters gilt, $u_x = 2x = v_y = 2x$ aber $u_y = 2y = -v_x = -2y$ nur für $y = 0$. Deshalb sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nur für $y = 0$ erfüllt und g ist nur auf $\mathbb{R}$ komplex differenzierbar.

c) Benutzen sie die Regel von de L'Hospital um folgende Grenzwerte zu berechnen. *c): 2 P.*

Begründen Sie auch warum die Anwendung der Regel erlaubt ist.

(i) $\lim_{z\to\infty} z^2 e^{-3z}$

(ii) $\lim_{z\to 0} \frac{e^{(z^2)}-1}{z^2}$

(iii) $\lim_{z\to\infty} z^{\frac{1}{z-1}}$

Alle Zähler und Nenner sind zumindest in einer Umgebung des betrachteten Punktes analytisch!

(i) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2}{\exp(3z)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{z\to\infty} \frac{2z}{3\exp(3z)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{z\to\infty} \frac{2}{9\exp(3z)} = 0$

(ii) $\lim_{z\to 0} \frac{\exp(z^2)-1}{z^2} = \frac{0}{0} = \lim_{z\to 0} \frac{2z\exp(z^2)}{2z} = \lim_{z\to 0} \exp(z^2) = 1$

(iii) $\lim_{z\to\infty} z^{\frac{1}{z-1}} = \infty^0 = \lim_{z\to\infty} \exp\left(\frac{\log_0(z)}{z-1}\right) = \exp\left(\lim_{z\to\infty}\left(\frac{\log_0(z)}{z-1}\right)\right) = \exp\left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$
$\exp\left(\lim_{z\to\infty}\left(\frac{1/z}{1}\right)\right) = \exp\left(\lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \exp(0) = 1$