Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe 1 (DI, 6.5.2014) (*mit Lösung*)

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: *a): 2 P.*

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Untersuchen Sie die Stetigkeit, die Richtungsdifferenzierbarkeit und die totale Differenzierbarkeit der Funktion f.

Die Funktion f ist offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Um die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ zu überprüfen, wähle $x = h$, $y = h^2$: $\lim_{h\to 0+} \frac{h^3}{h^2+h^4} = \infty$. Somit ist f an $(0,0)$ unstetig und daher in $(0,0)$ weder richtungsdifferenzierbar noch total differenzierbar.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ sind stetig auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, somit ist f richtungs- und total differenzierbar auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: *b): 1 P.*

$$\boxed{f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos^2(x) + \ln(\frac{x}{y}) \\ \sin(y)\, e^{z/3} \\ \tan(x+z) \end{pmatrix}, \quad xy > 0.}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -2\cos(x)\,\sin(x) + \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \cos(y)\,e^{z/3} & \frac{1}{3}\sin(y)\,e^{z/3} \\ 1+\tan^2(x+z) & 0 & 1+\tan^2(x+z) \end{pmatrix}.$$

Dabei folgt $x \neq 0, y \neq 0$ aus der Voraussetzung $xy > 0$.

c) Betrachten Sie die zweite Komponente des Vektorfeldes in (b) als Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: *c): 3 P.*

$\boxed{f(y,z) = \sin(y)\,e^{z/3}.}$

(i) Entwickeln Sie f um den Punkt $(y_0, z_0) = (\pi, 0)$ in die Taylorreihe bis zum linearen Glied .

(ii) Geben Sie eine Abschätzung des Restgliedes 2. Ordnung in folgender Form an:

$$|R_2(y,z;\eta,\zeta)| \leq C(|y-y_0|^2 + |z-z_0|^2)$$

für alle $(\eta,\zeta) \in [0,2\pi] \times [-1,1]$, mit einer festen Konstante $C \in \mathbb{R}_+$.

(i) $T_1(y,z) = f(\pi,0) + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}(\pi,0)(y-\pi) + \frac{\partial f(y,z)}{\partial z}(\pi,0)(z-0) = -(y-\pi)$.

(ii) Es gilt

$$R_2(y,z;\eta,\zeta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta,\zeta)(y-\pi)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\eta,\zeta)(y-\pi)z + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\eta,\zeta)z^2\right).$$

Für die zweiten Ableitungen gilt für $(\eta,\zeta) \in [0,2\pi] \times [-1,1]$:

$|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\eta,\zeta)| = |-\sin(\eta)\,e^{\zeta/3}| \leq e^{1/3}$,

$|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\eta,\zeta)| = |\frac{1}{9}\sin(\eta)\,e^{\zeta/3}| \leq \frac{1}{9}\,e^{1/3}$,

$|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\eta,\zeta)| = |\frac{1}{3}\cos(\eta)\,e^{\zeta/3}| \leq \frac{1}{3}\,e^{1/3}$.

Daraus folgt für das Restglied:

$|R_2(y,z;\eta,\zeta)| \leq \frac{1}{2}(e^{1/3}|y-\pi|^2 + 2\frac{1}{3}\,e^{1/3}|y-\pi||z| + \frac{1}{9}\,e^{1/3}|z|^2) \leq$

$\frac{1}{2}\,e^{1/3}(|y-\pi|^2 + |y-\pi||z| + |z|^2) \leq \frac{3}{4}\,e^{1/3}(|y-\pi|^2 + |z|^2)$, wegen $|y-\pi||z| \leq \frac{1}{2}(|y-\pi|^2 + |z|^2)$.

Damit ist $C = \frac{3}{4}\,e^{1/3}$.

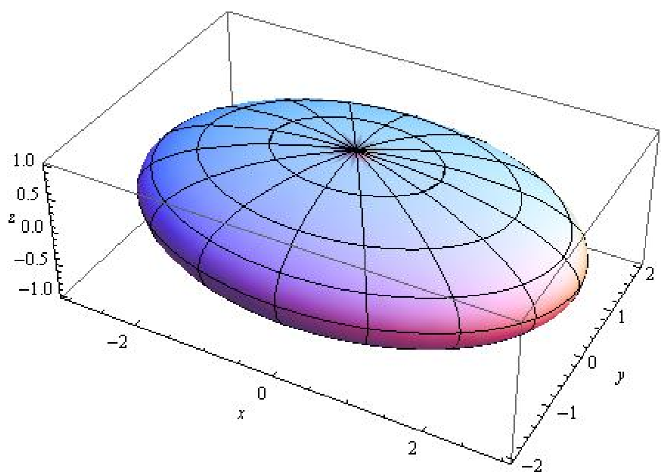
- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y,z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2.}$ *a): 1 P.*

Skizzieren Sie die Niveauflächen $N_c(f)$.

Die Niveauflächen besitzen Ellipsoidform,

$$N_c(f) = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = c, \ \ c \geq 0\}.$$



b) (i) Bestimmen Sie ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $P = (0, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \in N_c(f)$. *b): 3 P.*

(ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt P in Richtung des Gradienten ∇f.

(i) Den Wert der Konstanten c erhält man durch Einsetzen von P in das Skalarfeld.
$\Rightarrow c = f(P) = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1.$

(ii) Der Gradient ergibt sich zu $\nabla f = (\frac{2}{9}x, \frac{1}{2}y, 2z)^T$.
Das Auswerten des Gradienten im Punkt P liefert $\nabla f(P) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})^T$.

Der Richtungsvektor, ergibt sich aus der Normierung des eben berechneten Vektors

$$\boldsymbol{v} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|_2} = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})^T$$

.

Da das hier betrachtete Skalarfeld stetig differenzierbar ist, erhält man für die Richtungsableitung $D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot \boldsymbol{v} = \|\nabla f(P)\|_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an $f(x, y, z)$ im Punkt P an. *c): 2 P.*

Die Niveaufläche $N_1(f)$ lautet $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ und da P dazugehört gilt

$$z(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$z = z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

wobei $x_0 = 0$ und $y_0 = \sqrt{2}$ gilt. Weiters ist $z(0, \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(0, \sqrt{2}) = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial y}(0, \sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$.
Damit gilt

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(y - \sqrt{2}) \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z = 2.$$

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = x^3 - y^2 - 2x + xy.}$ *a): 2 P.*

(i) Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y) und dann im Punkt $(x_0,y_0) = (1,0)$.

(ii) Geben Sie die quadratische Taylorreihe von f im Punkt $(x_0,y_0) = (1,0)$ an.

(i) $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y - 2, x - 2y)^T$, $\nabla f(1,0) = (1,1)^T$.

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $T_2(x,y) = -1 + \begin{pmatrix} 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1, & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} =$
$-1 + (x-1) + y + \frac{1}{2}(6(x-1)^2 + 2(x-1)y - 2y^2)$.

b) Bestimmen Sie in welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ die Funktion f elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist. *b): 2 P.*

Es gilt $\det H(f)(x,y) = -(12x+1)$.

Parabolische Punkte: Die Determinante ist Null und damit $H(f)$ singulär für $x = -\frac{1}{12}$. Also die parabolischen Punkte sind $\left\{(-\frac{1}{12}, y) : y \in \mathbb{R}\right\}$.

Elliptische Punkte: Nach dem Hauptminorenkriterium ist $H(f)$ genau dann positiv definit, wenn die Determinante und der erste Hauptminor $6x$ größer als Null sind. Das bedeutet $x < -\frac{1}{12}$ und gleichzeitig $x > 0$ was ein Widerspruch ist. $H(f)$ ist also nirgends positiv definit. Ebenfalls nach dem Hauptminorenkriterium ist $H(f)$ genau dann negativ definit, wenn die Determinante größer als Null ist und der erste Hauptminor kleiner als Null. Also ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -\frac{1}{12}\right\}$ die Menge der elliptischen Punkte.

Hyperbolische Punkte: Damit ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -\frac{1}{12}\right\}$ die Menge der hyperbolischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Handelt es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte? *c): 2 P.*

$\nabla f(x,y) = (3x^2 + y - 2, x - 2y)^T = 0$

$\Rightarrow x = 2y$

$\Rightarrow 3x^2 + \frac{x}{2} - 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{97}}{12}, \quad y_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{97}}{24}$

Es existieren genau zwei stationäre Punkte $P_1 = (x_1, y_1)^T = (\frac{-1+\sqrt{97}}{12}, \frac{-1+\sqrt{97}}{24})^T$ und $P_2 = (x_2, y_2)^T = (\frac{-1-\sqrt{97}}{12}, \frac{-1-\sqrt{97}}{24})^T$.

Wegen $x_1 > -\frac{1}{12}$ ist P_1 ein hyperbolischer Punkt und damit ein Sattelpunkt.

Wegen $x_2 < -\frac{1}{12}$ ist P_2 ein elliptischer Punkt. $H(f)(P_2)$ ist negativ definit, deshalb ist P_2 ein Maximum von f.