Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

A N A L Y S I S II F Ü R T P H, (103.091)

Test 1 Gruppe 2 (DI, 6.5.2014) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = -x^3 - y^2 + 3x + xy}$ *a): 2 P.*

(i) Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y) und dann im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$.

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ an.

(i) $\nabla f(x,y) = (-3x^2 + y + 3, x - 2y)^T$, $\nabla f(0,1) = (4, -2)^T$.

$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $H(f)(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(ii) $T_2(x,y) = -1 + \begin{pmatrix} 4, & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x, & y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} =$
$-1 + 4x - 2(y-1) + \frac{1}{2}\left(2x(y-1) - 2(y-1)^2\right)$.

b) Bestimmen Sie in welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ die Funktion f elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist. *b): 2 P.*

Es gilt $\det H(f)(x,y) = 12x - 1$.

Parabolische Punkte: Die Determinante ist Null und damit $H(f)$ singulär genau für $x = \frac{1}{12}$. Also sind die parabolischen Punkte $\left\{(\frac{1}{12}, y) : y \in \mathbb{R}\right\}$.

Elliptische Punkte: Nach dem Hauptminorenkriterium ist $H(f)$ genau dann positiv definit, wenn die Determinante und der erste Hauptminor $-6x$ größer Null sind. Das bedeutet $x > \frac{1}{12}$ und gleichzeitig $x < 0$, was ein Widerspruch ist. $H(f)$ ist also nirgends positiv definit. Ebenfalls nach dem Hauptminorenkriterium ist $H(f)$ genau dann negativ definit, wenn die Determinante größer Null und der erste Hauptminor kleiner Null ist. Also ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{12}\right\}$ die Menge der elliptischen Punkte.

Hyperbolische Punkte: Damit ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{1}{12}\right\}$ die Menge der hyperbolischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Handelt es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte? *c): 2 P.*

$\nabla f(x,y) = (-3x^2 + y + 3, x - 2y)^T = 0$

$\Rightarrow x = 2y$

$\Rightarrow -3x^2 + \frac{x}{2} + 3 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{12}, \quad y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{24}$

Also existieren genau zwei stationäre Punkte $P_1 = (x_1, y_1)^T = (\frac{1+\sqrt{145}}{12}, \frac{1+\sqrt{145}}{24})^T$ und $P_2 = (x_2, y_2)^T = (\frac{1-\sqrt{145}}{12}, \frac{1-\sqrt{145}}{24})^T$.

Wegen $x_1 > \frac{1}{12}$ ist P_1 ein ellipitscher Punkt. $H(f)(P_1)$ ist negativ definit, daher ist P_1 ein Maximum von f.

Wegen $x_2 < \frac{1}{12}$ ist P_2 ein hyperbolischer Punkt und damit ein Sattelpunkt.

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:$ *a): 2 P.*

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Untersuchen Sie die Stetigkeit, die Richtungsdifferenzierbarkeit und die totale Differenzierbarkeit der Funktion f.

Die Funktion f ist offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Um die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ zu überprüfen, wähle $x = h$, $y = h^2$: $\lim_{h\to 0+} \frac{h^2-h^4}{h^2+h^4} = 1 \neq 0 = f(0,0)$. Somit ist f an $(0,0)$ unstetig und daher in $(0,0)$ weder richtungsdifferenzierbar noch total differenzierbar.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ sind stetig auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, somit ist f richtungs- und total differenzierbar auf $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3:$ *b): 1 P.*

$$\boxed{f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin^2(x) + \ln(\frac{x}{y}) \\ \cos(y)\, e^{-z} \\ \tan(z-x) \end{pmatrix}, \quad xy > 0.}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2\sin(x)\,\cos(x) + \frac{1}{x} & -\frac{1}{y} & 0 \\ 0 & -\sin(y)\,e^{-z} & -\cos(y)\,e^{-z} \\ -1 + \tan^2(z-x) & 0 & 1 - \tan^2(z-x) \end{pmatrix}.$$

Dabei folgt $x \neq 0, y \neq 0$ aus der Voraussetzung $xy > 0$.

c) Betrachten Sie die erste Komponente des Vektorfeldes in (b) als Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: *c): 3 P.*

$$\boxed{f(x,y) = \sin^2(x) + \ln(\frac{x}{y}).}$$

(i) Entwickeln Sie f um den Punkt $(x_0, y_0) = (\pi, \pi)$ in die Taylorreihe bis zum linearen Glied .

(ii) Geben Sie eine Abschätzung des Restgliedes 2. Ordnung in folgender Form an:

$$|R_2(x,y;\xi,\eta)| \leq C(|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2)$$

für alle $(\xi,\eta) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, mit einer festen Konstante $C \in \mathbb{R}_+$.

(i) $T_1(x,y) = f(\pi,\pi) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(\pi,\pi)(x-\pi) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(\pi,\pi)(y-\pi) = \frac{1}{\pi}(x-\pi) - \frac{1}{\pi}(y-\pi)$.

(ii) Es gilt

$$R_2(y,z;\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)(x-\pi)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)(x-\pi)(y-\pi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)(y-\pi)^2\right).$$

Für die zweiten Ableitungen gilt für $(\xi,\eta) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$,

$|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)| = |2(\cos^2(\xi) - \sin^2(\xi)) - \frac{1}{\xi^2}| \leq 2|\cos(2\xi)| + \frac{1}{\xi^2} \leq 2 + \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} \leq \frac{5}{2}$,

$|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)| = |\frac{1}{\eta^2}| \leq \frac{4}{\pi^2} \leq \frac{1}{2}$,

$|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)| = 0$.

Daraus folgt für das Restglied

$|R_2(x,y;\xi,\eta)| \leq \frac{1}{2}(\frac{5}{2}|x-\pi|^2 + 0 + \frac{1}{2}|y-\pi|^2) \leq$

$\frac{1}{2}(\frac{5}{2}|x-\pi|^2 + \frac{5}{2}|y-\pi|^2) \leq \frac{5}{4}(|x-\pi|^2 + |y-\pi|^2)$.

Damit ist $C = \frac{5}{4}$.

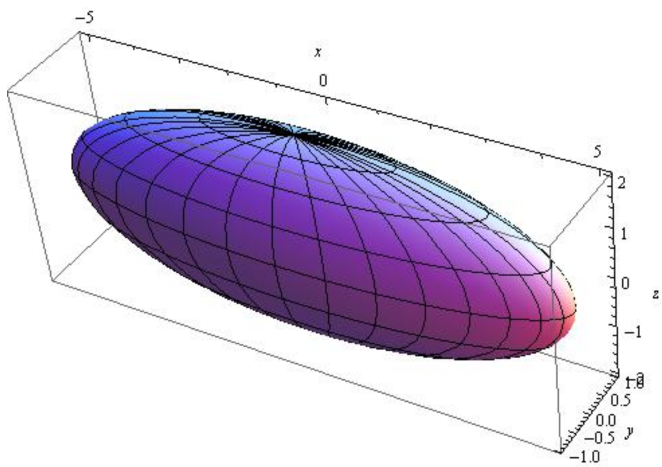
- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y,z) = \frac{x^2}{25} + y^2 + \frac{z^2}{4}.}$ *a): 1 P.*

Skizzieren Sie die Niveauflächen $N_c(f)$.

Die Niveauflächen besitzen Ellipsoidform.

$$N_c(f) = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{25} + y^2 + \frac{z^2}{4} = c, \;\; c \geq 0\}.$$



b) (i) Bestimmen Sie ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $P = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})^T \in N_c(f)$. *b): 3 P.*

(ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt P in Richtung des Gradienten ∇f.

(i) Den Wert der Konstanten c erhält man durch Einsetzen von P in das Skalarfeld.
$\Rightarrow c = f(P) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$

(ii) Der Gradient ergibt sich zu $\nabla f = (\frac{2}{25}x, 2y, \frac{1}{2}z)^T$.
Die Auswertung des Gradienten im Punkt P liefert $\nabla f(P) = (0, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

Der Richtungsvektor, ergibt sich aus der Normierung des eben berechneten Vektors

$$\boldsymbol{v} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|_2} = (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})^T$$

.

Da das hier betrachtete Skalarfeld stetig differenzierbar ist, erhält man für die Richtungsableitung $D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot \boldsymbol{v} = \|\nabla f(P)\|_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an $f(x,y,z)$ im Punkt P an. *c): 2 P.*

Die Niveaufläche $N_1(f)$ lautet $\frac{x^2}{25} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ und da P dazugehört gilt

$$z(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4}}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$z = z(x_0,y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0),$$

wobei $x_0 = 0$ und $y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt. Weiters ist $z(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(0, \sqrt{2}) = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial y}(0, \sqrt{2}) = -2$. Damit gilt

$$z = \sqrt{2} - 2(y - \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow \sqrt{2}y + \frac{z}{\sqrt{2}} = 2.$$