Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe 3 (DI, 6.5.2014) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

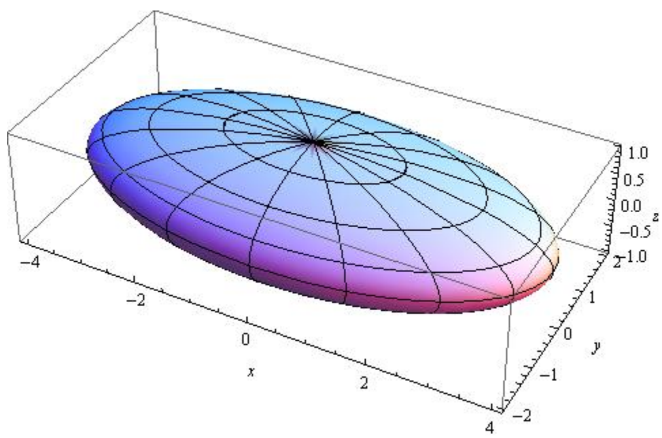
- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y,z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2.}$ *a): 1 P.*

Skizzieren Sie die Niveauflächen $N_c(f)$.

Die Niveauflächen besitzen Ellipsoidform,

$$N_c(f) = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = c, \;\; c \geq 0\}.$$



b) (i) Bestimmen Sie ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass $P = (0,2,1)^T \in N_c(f)$. *b): 3 P.*

(ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt P in Richtung des Gradienten ∇f.

(i) Den Wert der Konstanten c erhält man durch Einsetzen von P in das Skalarfeld.
$\Rightarrow c = f(P) = 1 + 1 = 2.$

(ii) Der Gradient ergibt sich zu $\nabla f = (\frac{1}{8}x, \frac{1}{2}y, 2z)^T$.
Die Auswertung des Gradienten im Punkt P liefert $\nabla f(P) = (0,1,2)^T$.

Der Richtungsvektor, ergibt sich aus der Normierung des eben berechneten Vektors

$$\boldsymbol{v} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|_2} = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})^T$$

.

Da das hier betrachtete Skalarfeld stetig differenzierbar ist, erhält man für die Richtungsableitung $D_v f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{v} = |\nabla f(P)| = \sqrt{5}$.

c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an $f(x, y, z)$ im Punkt P an. *c): 2 P.*

Die Niveaufläche $N_1(f)$ lautet $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 2$ und da P dazugehört gilt

$$z(x, y) = \sqrt{2 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$z = z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

wobei $x_0 = 0$ und $y_0 = 2$ gilt. Weiters ist $z(0, 2) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial x}(0, \sqrt{2}) = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial y}(0, \sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$. Damit gilt

$$z = 1 - \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow y + 2z = 2.$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 3x + xy}$ *a): 2 P.*

(i) Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y) und dann im Punkt $(x_0, y_0) = (0, -1)$.

(ii) Geben Sie die quadratische Taylor-Entwicklung von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, -1)$ an.

(i) $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y - 3, x + 4y)^T$, $\nabla f(0,-1) = (-4,-4)^T$.

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(f)(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) $T_2(x,y) = 2 + \begin{pmatrix} -4, & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x, & y+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} =$
$2 - 4x - 4(y+1) + \frac{1}{2}(2x(y+1) + 4(y+1)^2)$.

b) Bestimmen Sie in welchen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ die Funktion f elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch ist. *b): 2 P.*

Es gilt $\det H(f)(x,y) = 24x - 1$.

Parabolische Punkte: Die Determinante ist Null und damit $H(f)$ singulär für $x = \frac{1}{24}$. Die parabolischen Punkte sind also $\left\{(\frac{1}{24}, y) : y \in \mathbb{R}\right\}$.

Elliptische Punkte: Nach dem Hauptminorenkriterium ist $H(f)$ genau dann negativ definit, wenn die Determinante größer Null und der erste Hauptminor $6x$ kleiner Null ist. Das bedeutet $x > \frac{1}{24}$ und gleichzeitig $x < 0$, was ein Widerspruch ist. $H(f)$ ist also nirgends negativ definit. Ebenfalls nach dem Hauptminorenkriterium ist $H(f)$ genau dann positiv definit, wenn die Determinante und der erste Hauptminor größer Null sind. Also ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{24}\right\}$ die Menge der elliptischen Punkte.

Hyperbolische Punkte: Damit ist $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{1}{24}\right\}$ die Menge der hyperbolischen Punkte von f.

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Handelt es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte? *c): 2 P.*

$\nabla f(x,y) = (3x^2 + y - 3, x + 4y)^T = 0$

$\Rightarrow x = -4y$

$\Rightarrow 3x^2 - \frac{x}{4} - 3 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{577}}{24}, \quad y_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{577}}{96}$

Also existieren genau zwei stationäre Punkte $P_1 = (x_1, y_1)^T = (\frac{1+\sqrt{577}}{24}, -\frac{1+\sqrt{577}}{96})^T$ und $P_2 = (x_2, y_2)^T = (\frac{1-\sqrt{577}}{24}, -\frac{1-\sqrt{577}}{96})^T$.

Wegen $x_1 > \frac{1}{24}$ ist P_1 ein ellipitscher Punkt. $H(f)(P_1)$ ist positiv definit, daher ist P_1 ein Minimum von f.

Wegen $x_2 < \frac{1}{24}$ ist P_2 ein hyperbolischer Punkt und damit ein Sattelpunkt.

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: *a): 2 P.*

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Untersuchen Sie die Stetigkeit, die Richtungsdifferenzierbarkeit und die totale Differenzierbarkeit der Funktion f.

f ist offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Um die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ zu überprüfen, wähle $x = h$, $y = h^2$: $\lim_{h \to 0+} \frac{h^3}{h^2+2h^4} = \infty$. Somit ist f an $(0,0)$ unstetig und daher in $(0,0)$ weder richtungsdifferenzierbar noch total differenzierbar.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y^3-x^2y}{(x^2+2y^2)^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3-2xy^2}{(x^2+2y^2)^2}$ sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, somit ist f richtungs- und total differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: *b): 1 P.*

$$\boxed{f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xe^{-2y} \\ xy - \cos^2(z) \\ \sin(2xz) \end{pmatrix}.}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f.

$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial (x,y,z)} = \begin{pmatrix} e^{-2y} & -2x\, e^{-2y} & 0 \\ y & x & 2\cos(z)\sin(z) \\ 2z\cos(2xz) & 0 & 2x\cos(2xz) \end{pmatrix}$.

c) Betrachten Sie die dritte Komponente des Vektorfeldes in (b) als Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: *c): 3 P.*

$\boxed{f(x,z) = \sin(2xz).}$

(i) Entwickeln Sie f um den Punkt $(x_0, z_0) = (1, \pi)$ in die Taylorreihe bis zum linearen Glied .

(ii) Geben Sie eine Abschätzung des Restgliedes 2. Ordnung in folgender Form an:

$$|R_2(x, z; \xi, \zeta)| \leq C(|x - x_0|^2 + |z - z_0|^2)$$

für alle $(\xi, \zeta) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$, mit einer festen Konstante $C \in \mathbb{R}_+$.

(i) $T_1(x,z) = f(1,\pi) + \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}(1,\pi)(x-1) + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}(1,\pi)(z-\pi) = 2\pi(x-1) + 2(z-\pi)$.

(ii) Es gilt

$$R_2(x,z;\xi,\zeta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\zeta)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\xi,\zeta)(x-1)(z-\pi) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\xi,\zeta)(z-\pi)^2\right).$$

Für die zweiten Ableitungen gilt für $(\xi,\zeta) \in [0,2] \times [0,2\pi]$:

$|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\zeta)| = |-4z^2\sin(2\xi\zeta)| \leq 16\pi^2$,

$|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\xi,\zeta)| = |-4x^2\sin(2\xi\zeta)| \leq 16$,

$|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\xi,\zeta)| = |-4\xi\zeta\sin(2\xi\zeta)| \leq 16\pi$.

Daraus folgt für das Restglied

$|R_2(x,z;\xi,\zeta)| \leq \frac{1}{2}(16\pi^2|x-1|^2 + 2\cdot 16\pi|x-1||z-\pi| + 16|z-\pi|^2) \leq$

$\frac{1}{2}(16\pi^2|x-1|^2 + 16\pi^2|x-1||z-\pi| + 16\pi^2|z-\pi|^2) \leq$

$8\pi^2(|x-1|^2 + |x-1||z-\pi| + |z-\pi|^2) \leq 12\pi^2(|x-1|^2 + |z-\pi|^2)$, wegen
$|x-1||z-\pi| \leq \frac{1}{2}(|x-1|^2 + |z-\pi|^2)$.

Damit ist $C = 12\pi^2$.