

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 2 Gruppe A (Fr, 13.06.2014) (mit Lösung)

— Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i>
			<input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

•

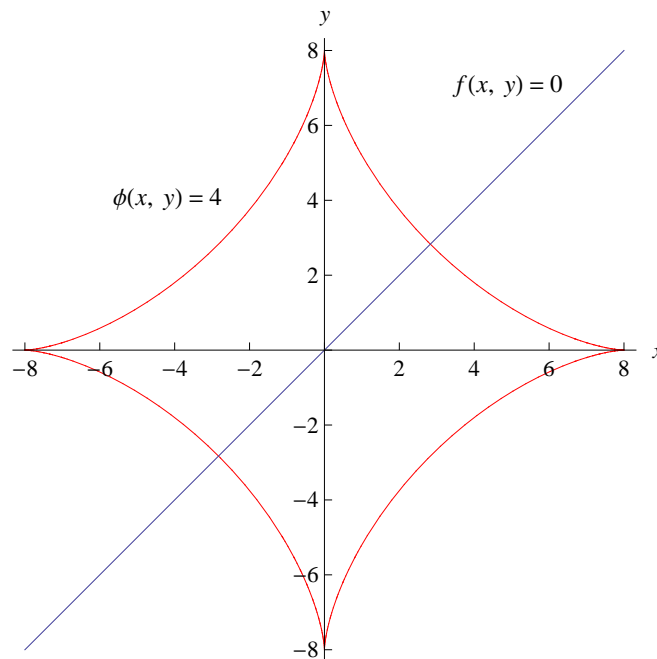
• **Aufgabe 1.**

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = (x - y)^2$$

unter der Nebenbedingung $\phi(x, y) = 4$ mit $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\phi(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$$



Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- a) Bestimmen Sie alle Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, an denen das Skalarfeld $\phi(x, y)$ Singularitäten besitzt!
 Welche dieser Punkte erfüllen die Nebenbedingung?

a): 1 P.

Der Gradient

$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

ist an all jenen Punkten unbeschränkt, deren x - oder y - Komponente gleich Null ist. Die Singularitäten lauten daher

$$\left\{ P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x = 0 \vee y = 0 \right\}.$$

Auf der Kurve, die durch $\phi(x, y) = 4$ definiert wird, liegen die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

b) Verwenden Sie die Methode der Lagrange- Multiplikatoren und Ihr Ergebnis aus a) zur Berechnung der möglichen Extrema.

Bestimmen Sie anschließend die globalen Minima und Maxima des Problems.

b): 3 P.

Die Lagrangefunktion lautet $F(x, y, \lambda) = (x - y)^2 + \lambda \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 \right)$.

Das Differenzieren dieser Funktion führt auf das Gleichungssystem

$$\text{I: } \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - y) + \frac{2}{3}\lambda x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\text{II: } \frac{\partial F}{\partial y} = -2(x - y) + \frac{2}{3}\lambda y^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\text{III: } \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 = 0.$$

Durch Addition der Gleichungen I und II erhält man

$$\frac{2}{3}\lambda \left(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}} \right) = 0.$$

Diese Beziehung wird durch $\lambda = 0$ oder durch $x = -y$ erfüllt. Schließlich werden die Gleichungen I und II entweder durch $x = y$ oder durch $x = -y$ gelöst.

In beiden Fällen ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung III

$$2x^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}.$$

Aus der Methode der Lagrangemultiplikatoren erhält man vier mögliche Extrema

$$E_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}.$$

Die unter a) bestimmten Singularitäten der Nebenbedingung (P_1, P_2, P_3, P_4) stellen ebenfalls mögliche Extrema dar.

An den Punkten $E_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ und $E_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$ nimmt die Funktion $f(x, y)$ den Wert 0 an.

An den Punkten $E_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$ und $E_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ nimmt die Funktion $f(x, y)$ den Wert 32 an.

An den Punkten $P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ nimmt die Funktion $f(x, y)$ den Wert 64 an.

Da die Nebenbedingung eine kompakte Menge beschreibt, liegen an den Punkten E_1 und E_2 Minima und an den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4 Maxima vor.

Betrachten Sie nun folgende Gleichung:

$$g(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4$$

- c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x, y)$ lokal um den Punkt $A = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{8} \\ \sqrt[3]{8} \end{pmatrix}$ nach $y = y(x)$ aufgelöst werden kann. c): 1 P.

Die drei Bedingungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen in zwei Variablen müssen überprüft werden.

(i) $g(\xi, \eta) = 0$: $2(\sqrt[3]{8})^{\frac{2}{3}} - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ sind stetig in einer Umgebung von (ξ, η) .

(iii) $\frac{\partial g}{\partial y} |_{(\xi, \eta)} \neq 0$: $\frac{\partial g}{\partial y} |_{(\xi, \eta)} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \neq 0$

Da die Bedingungen erfüllt sind, kann die Funktion $g(x, y)$ lokal nach $y = y(x)$ aufgelöst werden.

- d) Berechnen Sie die 1. Ableitung der implizit definierten Funktion $y(x)$ am Punkt A durch implizite Differentiation. d): 1 P.

$$y'(x) |_{(\xi, \eta)} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} |_{(\xi, \eta)} \Rightarrow y'(x) |_A = -\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{3} = -1$$

• **Aufgabe 2.**

a) Betrachten Sie für $T \in (0, 1)$ die Integralgleichung

$$x(t) = 1 - 3 \int_0^t s^2 x(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass (??) eine eindeutige Lösung $x \in C[0, T]$ besitzt!

Schreiben Sie (??) dafür als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0, T], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, T], \|\cdot\|_\infty)$. Argumentieren Sie, warum F nach $C[0, T]$ abbildet und beweisen Sie, dass F eine Kontraktion ist! (i): 1.5 P.

- Definiere den Operator F für $x \in C[0, T]$ durch

$$(Fx)(t) = 1 - 3 \int_0^t s^2 x(s) ds.$$

- Stetigkeit von Fx : Für $x \in C[0, T]$ gilt, dass der Integrand $s^2 x(s)$ stetig ist. Damit folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, dass Fx auf $(0, T)$ differenzierbar und somit stetig ist.
- F ist Kontraktion auf $(C[0, T], \|\cdot\|_\infty)$:

$$\begin{aligned} \|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \sup_{t \in [0, T]} \left| 1 - 3 \int_0^t s^2 x_1(s) ds - 1 + 3 \int_0^t s^2 x_2(s) ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} 3 \int_0^t s^2 |x_1(s) - x_2(s)| ds \\ &\leq \|x_1 - x_2\|_\infty \cdot 3 \int_0^T s^2 ds \\ &= T^3 \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

Da $T \in (0, 1)$ folgt $T^3 < 1$ und damit ist F eine Kontraktion.

- Damit folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0, T]$ mit $Fx = x$, also existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung (??).

- (ii) Berechnen Sie die ersten drei Schritte x_1 , x_2 und x_3 der Picard-Iteration mit Startwert $x_0(t) = 1$ und stellen Sie eine Formel für x_n , $n \in \mathbb{N}$ auf! (ii): 1.5 P.

Picard-Iteration: $x_n(t) = 1 - 3 \int_0^t s^2 x_{n-1}(s) ds.$

$$x_1(t) = 1 - 3 \int_0^t s^2 ds = 1 - t^3$$

$$x_2(t) = 1 - 3 \int_0^t s^2(1 - s^3) ds = 1 - t^3 + \frac{t^6}{2}$$

$$x_3(t) = 1 - 3 \int_0^t s^2(1 - s^3 + \frac{s^6}{2}) ds = 1 - t^3 + \frac{t^6}{2} - \frac{t^9}{2 \cdot 3}$$

Allgemeine Formel: $x_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-t^3)^k}{k!}$

- (iii) Wie lautet die exakte Lösung der Integralgleichung? Zu welchem Anfangswertproblem ist (??) äquivalent? (iii): 1 P.

Exakte Lösung: $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^3)^k}{k!} = e^{-t^3}$

Äquivalentes AWP durch Differenzieren der Integralgleichung: $\begin{cases} x'(t) = -3t^2 x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

b) Betrachten Sie die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1].$$

Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ ist und bestimmen Sie die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_1$! Ist diese Funktion auch die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$? Begründen Sie Ihre Antwort!
b): 2 P.

- Die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend, daher gilt für $n \leq m$:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |x^n - x^m| dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Wähle nun $N(\epsilon)$ so, dass $\frac{1}{N(\epsilon)+1} < \epsilon$, dann gilt

$$\|f_n - f_m\|_1 < \epsilon \quad \forall n, m \geq N(\epsilon).$$

- Die Grenzfunktion ist $f(x) = 0$, da

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |x^n| dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- $f(x) = 0$ ist nicht die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, da

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |x^n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

• **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$:

a): 4 P.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [-\pi, 0) \\ -x & \text{für } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

- (i) Entwickeln Sie f in eine trigonometrische Fourierreihe.
(ii) Untersuchen Sie die Reihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) f ist gerade und kann in eine reine Cosinus-Reihe entwickelt werden.

$k > 0$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} x \sin(kx) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{1}{k} \sin(kx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \cos(kx) \Big|_{-\pi}^0 \\ &= \frac{2}{\pi k^2} - (-1)^k \frac{2}{\pi k^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{4}{\pi k^2} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 x dx = \frac{2x^2}{2\pi} \Big|_{-\pi}^0 = -\pi$$

$$\Rightarrow f(x) \sim -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

(ii) Punktweise Konvergenz: f ist beschränkt und kann zu einer 2π -periodischen Funktion \tilde{f} fortgesetzt werden. \tilde{f} ist stetig differenzierbar bis auf in $[-\pi, \pi]$ endlich viele Sprungstellen. Die Reihe konvergiert also punktweise gegen $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

Untersuche die Sprungstellen: Da f bzw. \tilde{f} auf $[-\pi, \pi]$ stetig ist, gilt $f(0+) = f(0-) = f(0)$, $f((-\pi)+) = f((-\pi)-) = f(-\pi)$ und $f(\pi+) = f(\pi-) = f(\pi)$. Die Fourierreihe konvergiert also überall punktweise gegen f .

Gleichmäßige Konvergenz: \tilde{f} ist stetig, die Fourierreihe konvergiert also sogar gleichmäßig gegen f .

- b) Gegeben sei das System $\{1, x, x^2, \dots\}$. Orthonormieren Sie die ersten zwei Funktionen dieses Systems bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) := \int_{-\infty}^0 2e^x f(x)g(x) dx$$

b): 2 P.

Hinweis: $\int xe^x dx = e^x(x-1)$ und $\int x^2e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

Für das Gram-Schmidt-Verfahren und ein gegebenes System $\{b_i\}_{i \in I}$ gilt:

$$a_1 := b_1 \text{ und } a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{(b_{n+1}, a_k)}{(a_k, a_k)} \cdot a_k, \quad n \geq 1.$$

In unserem Fall gilt also $a_1 = 1$, wobei

$$\|a_1\|^2 = \int_{-\infty}^0 2e^x \cdot 1 dx = 2e^x \Big|_{-\infty}^0 = 2 \Rightarrow \|a_1\| = \sqrt{2}.$$

Weiters gilt $a_2 = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \cdot 1$, mit

$$(x, 1) = \int_{-\infty}^0 2e^x x \cdot 1 dx = 2e^x(x-1) \Big|_{-\infty}^0 = -2.$$

$$(1, 1) = \|a_1\|^2 = 2.$$

Daraus folgt $a_2 = x + 1$ und

$$\|a_2\|^2 = \int_{-\infty}^0 2e^x(x+1)^2 dx = 2 \left(\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx + 2 \int_{-\infty}^0 x e^x dx + \int_{-\infty}^0 e^x dx \right) = 2(2 + (-2) + 1) = 2 \Rightarrow \|a_2\| = \sqrt{2}.$$

Daraus ergibt sich das orthonormierte System

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \phi_2 &= \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{x+1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$