Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

Test 2 Gruppe B (Fr, 13.06.2014) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}:$ *a): 4 P.*

$$\boxed{f(x) = |x|}$$

(i) Entwickeln Sie f in eine trigonometrische Fourierreihe.
(ii) Untersuchen Sie die Reihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) f ist gerade und kann in eine reine Cosinus-Reihe entwickelt werden.

$k > 0$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\sin(kx)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}\cos(kx)|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2x^2}{2\pi}|_0^{\pi} = \pi$

$\Rightarrow f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$

(ii) Punktweise Konvergenz: f ist beschränkt und kann zu einer 2π-periodischen Funktion $\tilde{f}$ fortgesetzt werden. $\tilde{f}$ ist stetig differenzierbar bis auf in $[-\pi,\pi]$ endlich viele Sprungstellen. Die Reihe konvergiert also punktweise gegen $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Untersuche die Sprungstellen: Da f bzw $\tilde{f}$ auf $[-\pi,\pi]$ stetig ist, gilt $f(0+) = f(0-) = f(0)$, $f((-\pi)+) = f((-\pi)-) = f(-\pi)$ und $f(\pi+) = f(\pi-) = f(\pi)$. Die Fourierreihe konvergiert also überall punktweise gegen f.

Gleichmäßige Konvergenz: $\tilde{f}$ ist stetig, die Fourierreihe konvergiert also sogar gleichmäßig gegen f.

b) Gegeben sei das System $\{1, x, x^2, ...\}$. Orthonormieren Sie die ersten zwei Funktionen dieses Systems bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{0} 3e^x f(x)g(x)dx$$

b): 2 P.

Hinweis: $\int xe^x \; dx = e^x(x-1)$ und $\int x^2 e^x \; dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

Für das Gram-Schmidt-Verfahren und ein gegebenes System$\{b_i\}_{i \in I}$ gilt:

$a_1 := b_1$ und $a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b_{n+1}, a_k)}{(a_k, a_k)} \cdot a_k$, $n \geq 1$.

In unserem Fall gilt also $a_1 = 1$, wobei

$\|a_1\|^2 = \int_{-\infty}^{0} 3e^x \cdot 1 \; dx = 3e^x \mid_{-\infty}^{0} = 3 \Rightarrow \|a_1\| = \sqrt{3}$.

Weiters gilt $a_2 = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \cdot 1$, mit

$(x, 1) = \int_{-\infty}^{0} 3e^x x \cdot 1 \; dx = 3e^x(x-1) \mid_{-\infty}^{0} = -3$.
$(1, 1) = \|a_1\|^2 = 3$.

Daraus folgt $a_2 = x + 1$ und

$\|a_2\|^2 = \int_{-\infty}^{0} 3e^x(x+1)^2 \; dx = 3 \left(\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x \; dx + 2 \int_{-\infty}^{0} xe^x \; dx + \int_{-\infty}^{0} e^x \; dx \right) =$
$3\,(2 + (-2) + 1) = 3 \Rightarrow \|a_2\| = \sqrt{3}$.

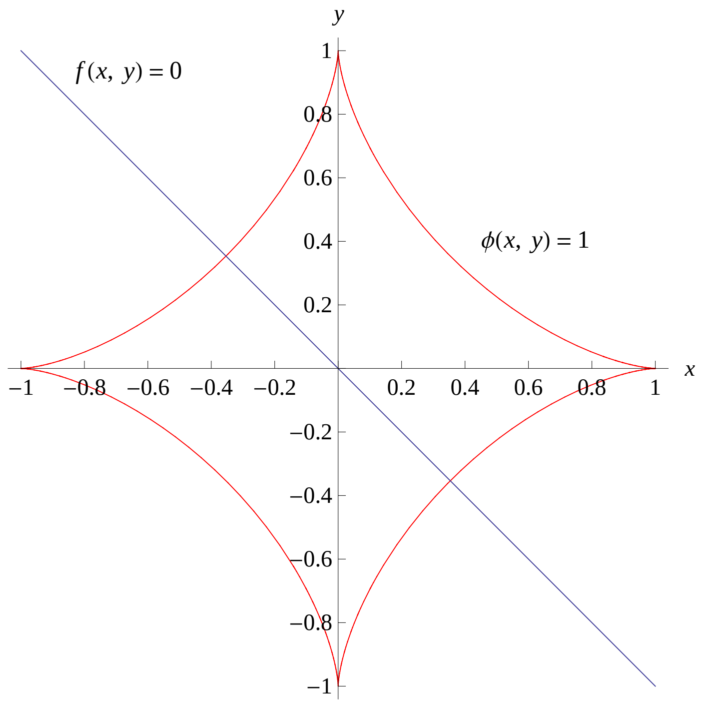
Daraus ergibt sich das orthonormierte System

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \phi_2 &= \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{x+1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = (x+y)^2}$

unter der Nebenbedingung $\phi(x,y) = 1$ mit $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{\phi(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$



Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie alle Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, an denen das Skalarfeld $\phi(x,y)$ Singularitäten besitzt! Welche dieser Punkte erfüllen die Nebenbedingung? *a): 1 P.*

Der Gradient

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

ist an all jenen Punkten unbeschränkt, deren x - oder y - Komponente gleich Null ist. Die Singularitäten lauten daher

$$\left\{ P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x = 0 \vee y = 0 \right\}.$$

Auf der Kurve, die durch $\phi(x,y) = 1$ definiert wird, liegen die Punkte:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Verwenden Sie die Methode der Lagrange- Multiplikatoren und Ihr Ergebnis aus a) zur Berechnung der möglichen Extrema.

Bestimmen Sie anschließend die globalen Minima und Maxima des Problems. *b): 3 P.*

Die Lagrangefunktion lautet $F(x,y,\lambda) = (x+y)^2 + \lambda\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 1\right)$.
Differenzieren dieser Funktion führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}: \quad & \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x+y) + \frac{2}{3}\lambda x^{-\frac{1}{3}} = 0 \\
\mathrm{II}: \quad & \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,(x+y) + \frac{2}{3}\lambda y^{-\frac{1}{3}} = 0 \\
\mathrm{III}: \quad & \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen I und II erhält man

$$\frac{2}{3}\lambda\left(x^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{3}}\right) = 0.$$

Diese Beziehung wird durch $\lambda = 0$ oder durch $x = y$ erfüllt. Schließlich werden die Gleichungen I und II entweder durch $x = -y$ oder durch $x = y$ gelöst.
In beiden Fällen ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung III

$$2x^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Aus der Methode der Lagrangemultiplikatoren erhält man vier mögliche Extrema

$$E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T, \quad E_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T, \quad E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T, \quad E_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T.$$

Die unter a) bestimmten Singularitäten der Nebenbedingung (P_1, P_2, P_3, P_4) stellen ebenfalls mögliche Extrema dar.
An den Punkten $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T$ und $E_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T$ nimmt die Funktion $f(x,y)$ den Wert 0 an.
An den Punkten $E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T$ und $E_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T$ nimmt die Funktion $f(x,y)$ den Wert $\frac{1}{2}$ an.
An den Punkten $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ nimmt die Funktion $f(x,y)$ den Wert 1 an.

Da die Nebenbedingung eine kompakte Menge beschreibt, liegen an den Punkten E_1 und E_2 Minima und an den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4 Maxima vor.

Betrachten Sie nun folgende Gleichung: $\boxed{g(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 1}$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ lokal um den Punkt $A = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^T$ nach $y = y(x)$ aufgelöst werden kann. *c): 1 P.*

Die drei Bedingungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen in zwei Variablen müssen überprüft werden.

(i) $g(\xi,\eta) = 0$: $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ sind stetig in einer Umgebung von (ξ,η).

(iii) $\frac{\partial g}{\partial y}\mid_{(\xi,\eta)} \neq 0$: $\frac{\partial g}{\partial y}\mid_{(\xi,\eta)} = \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{\sqrt{8}}}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{8}}{3} \neq 0$

Da die Bedingungen erfüllt sind, kann die Funktion $g(x,y)$ lokal nach $y = y(x)$ aufgelöst werden.

d) Berechnen Sie die 1. Ableitung der implizit definierten Funktion $y(x)$ am Punkt A durch implizite Differentiation. *d): 1 P.*

$y'(x)\mid_{(\xi,\eta)} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}\mid_{(\xi,\eta)} \qquad \Rightarrow y'(x)\mid_A = -\left(-\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{8}}}\right)^{-1} = \frac{3}{\sqrt{8}}\frac{2\sqrt{2}}{3} = 1$

- **Aufgabe 3.**

a) Betrachten Sie für $T \in (0,1)$ die Integralgleichung

$$x(t) = 2 + 2\int_0^t s(1 - x(s))ds, \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass (**??**) eine eindeutige Lösung $x \in C[0,T]$ besitzt!
Schreiben Sie (**??**) dafür als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0,T], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$. Argumentieren Sie, warum F nach $C[0,T]$ abbildet und beweisen Sie, dass F eine Kontraktion ist! *(i): 1.5 P.*

- Definiere den Operator F für $x \in C[0,T]$ durch

$$(Fx)(t) = 2 + 2\int_0^t s(1 - x(s))ds.$$

- Stetigkeit von Fx: Für $x \in C[0,T]$ gilt, dass der Integrand $s(1 - x(s))$ stetig ist. Damit folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechung, dass Fx auf $(0,T)$ differenzierbar und somit stetig ist.

- F ist Kontraktion auf $(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$:

$$\begin{aligned}
\|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \sup_{t\in[0,T]} \left| 2 + 2\int_0^t s(1 - x_1(s))ds - 2 - 2\int_0^t s(1 - x_2(s))ds \right| \\
&\le \sup_{t\in[0,T]} 2\int_0^t s|x_1(s) - x_2(s)|ds \\
&\le \|x_1 - x_2\|_\infty \cdot 2\int_0^T sds \\
&= T^2 \|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Da $T \in (0,1)$ folgt $T^2 < 1$ und damit ist F eine Kontraktion.

- Damit folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0,T]$ mit $Fx = x$, also existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung (**??**).

(ii) Berechnen Sie die ersten drei Schritte x_1, x_2 und x_3 der Picard-Iteration mit Startwert $x_0(t) = 2$ und stellen Sie eine Formel für x_n, $n \in \mathbb{N}$ auf! *(ii): 1.5 P.*

Picard-Iteration: $x_n(t) = 2 + 2\int_0^t s(1 - x_{n-1}(s))ds$.

$$x_1(t) = 2 - 2\int_0^t sds = 2 - t^2$$

$$x_2(t) = 2 - 2\int_0^t s(-1 + s^2)ds = 2 - t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$x_3(t) = 2 - 2\int_0^t s(-1 + s^2 - \frac{s^4}{2})ds = 2 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6}$$

Allgemeine Formel: $x_n(t) = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{(-t^2)^k}{k!}$

(iii) Wie lautet die exakte Lösung der Integralgleichung? Zu welchem Anfangswertproblem ist (**??**) äquivalent? *(iii): 1 P.*

Exakte Lösung: $x(t) = 1 + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-t^2)^k}{k!} = 1 + e^{-t^2}$

Äquivalentes AWP durch Differenzieren der Integralgleichung: $\begin{cases} x'(t) = 2t(1 - x(t)) \\ x(0) = 2 \end{cases}$

b) Betrachten Sie die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = x^{2n}, \quad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ ist und bestimmen Sie die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_1$! Ist diese Funktion auch die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$? Begründen Sie Ihre Antwort! *b): 2 P.*

- Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, daher gilt für $n \leq m$:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |x^{2n} - x^{2m}| dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}.$$

  Wähle nun $N(\epsilon)$ so, dass $\frac{1}{2N(\epsilon)+1} < \epsilon$, dann gilt

$$\|f_n - f_m\|_1 < \epsilon \quad \forall n,\, m \geq N(\epsilon).$$

- Die Grenzfunktion ist $f(x) = 0$, da

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |x^{2n}| dx = \frac{1}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- $f(x) = 0$ ist nicht die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, da

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^{2n}| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$