Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2014

A N A L Y S I S I I F Ü R T P H, U E (103.091)

Test 2 Gruppe C (Fr, 13.06.2014) *(mit Lösung)*

— *Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textit{Kästchen}}$ eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt. •

- **Aufgabe 1.**

a) Betrachten Sie für $T \in (0,1)$ die Integralgleichung

$$x(t) = 2\int_0^t s(1+x(s))ds, \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass (1) eine eindeutige Lösung $x \in C[0,T]$ besitzt!
Schreiben Sie (1) dafür als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0,T], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$. Argumentieren Sie, warum F nach $C[0,T]$ abbildet und beweisen Sie, dass F eine Kontraktion ist! *(i): 1.5 P.*

- Definiere den Operator F für $x \in C[0,T]$ durch

$$(Fx)(t) = 2\int_0^t s(1+x(s))ds.$$

- Stetigkeit von Fx: Für $x \in C[0,T]$ gilt, dass der Integrand $s(1+x(s))$ stetig ist. Damit folgt aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechung, dass Fx auf $(0,T)$ differenzierbar und somit stetig ist.

- F ist Kontraktion auf $(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$:

$$\begin{aligned}
\|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \sup_{t\in[0,T]} \left| 2\int_0^t s(1+x_1(s))ds - 2\int_0^t s(1+x_2(s))ds \right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} 2\int_0^t s|x_1(s) - x_2(s)|ds \\
&\leq \|x_1 - x_2\|_\infty \cdot 2\int_0^T sds \\
&= T^2 \|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Da $T \in (0,1)$ folgt $T^2 < 1$ und damit ist F eine Kontraktion.

- Damit folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0,T]$ mit $Fx = x$, also existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung (1).

(ii) Berechnen Sie die ersten drei Schritte x_1, x_2 und x_3 der Picard-Iteration mit Startwert $x_0(t) = 0$ und stellen Sie eine Formel für x_n, $n \in \mathbb{N}$ auf! *(ii): 1.5 P.*

Picard-Iteration: $x_n(t) = 2\int_0^t s(1 + x_{n-1}(s))ds$.

$$x_1(t) = 2\int_0^t sds = t^2$$
$$x_2(t) = 2\int_0^t s(1+s^2)ds = t^2 + \frac{t^4}{2}$$
$$x_3(t) = 2\int_0^t s(1+s^2+\frac{s^4}{2})ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}$$

Allgemeine Formel: $x_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^{2k}}{k!}$

(iii) Wie lautet die exakte Lösung der Integralgleichung? Zu welchem Anfangswertproblem ist (1) äquivalent? *(iii): 1 P.*

Exakte Lösung: $x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{t^{2k}}{k!} = e^{t^2} - 1$

Äquivalentes AWP durch Differenzieren der Integralgleichung: $\begin{cases} x'(t) = 2t(1 + x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$

b) Betrachten Sie die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = x^{n+2}, \quad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ ist und bestimmen Sie die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_1$! Ist diese Funktion auch die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$? Begründen Sie Ihre Antwort! *b): 2 P.*

- Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, daher gilt für $n \le m$:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |x^{n+2} - x^{m+2}| dx \le \int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{1}{n+3}.$$

  Wähle nun $N(\epsilon)$ so, dass $\frac{1}{N(\epsilon)+3} < \epsilon$, dann gilt

$$\|f_n - f_m\|_1 < \epsilon \quad \forall n, m \ge N(\epsilon).$$

- Die Grenzfunktion ist $f(x) = 0$, da

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |x^{n+2}| dx = \frac{1}{n+3} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

- $f(x) = 0$ ist nicht die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, da

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^{n+2}| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$: *a): 4 P.*

$$\boxed{f(x) = -x}$$

(i) Entwickeln Sie f in eine trigonometrische Fourierreihe.
(ii) Untersuchen Sie die Reihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) f ist ungerade und kann in eine reine Sinus-Reihe entwickelt werden.

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} -x\sin(kx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\cos(kx)\mid_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\cos(kx)dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) - \frac{1}{k^2}\sin(kx)\mid_0^\pi\right) \\
&= \frac{2}{k}\cos(k\pi)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} -\frac{2}{k} & k \text{ ungerade} \\ \frac{2}{k} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\sin(kx)$

(ii) Punktweise Konvergenz: f ist beschränkt und kann zu einer 2π-periodischen Funktion $\tilde{f}$ fortgesetzt werden. $\tilde{f}$ ist stetig differenzierbar bis auf in $[-\pi,\pi]$ endlich viele Sprungstellen. Die Reihe konvergiert also punktweise gegen $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Untersuche die Sprungstellen: $f((-\pi)+) = f(\pi+) = \pi$ und $f((-\pi)-) = f(\pi-) = -\pi$. Die Fourierreihe konvergiert also für $x \in \{-\pi,\pi\}$ gegen 0 und sonst punktweise gegen f.

Gleichmäßige Konvergenz: Da die 2π-periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ nicht stetig ist, konvergiert die Fourierreihe nicht gleichmäßig.

b) Gegeben sei das System $\{1, x, x^2, ...\}$. Orthonormieren Sie die ersten zwei Funktionen dieses Systems bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{0} 4e^x f(x)g(x)dx$$

b): 2 P.

Hinweis: $\int xe^x\ dx = e^x(x-1)$ und $\int x^2e^x\ dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

Für das Gram-Schmidt-Verfahren und ein gegebenes System$\{b_i\}_{i\in I}$ gilt:

$a_1 := b_1$ und $a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b_{n+1},a_k)}{(a_k,a_k)} \cdot a_k,\ n \geq 1.$

In unserem Fall gilt also $\quad a_1 = 1$, wobei

$\|a_1\|^2 = \int_{-\infty}^{0} 4e^x \cdot 1\ dx = 4e^x\ |_{-\infty}^{0} = 4 \Rightarrow \|a_1\| = 2.$

Weiters gilt $a_2 = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \cdot 1$, mit

$(x, 1) = \int_{-\infty}^{0} 4e^x x \cdot 1\ dx = 4e^x(x-1)\ |_{-\infty}^{0} = -4.$
$(1, 1) = \|a_1\|^2 = 4.$

Daraus folgt $a_2 = x + 1$ und

$\|a_2\|^2 = \int_{-\infty}^{0} 4e^x(x+1)^2\ dx = 4\left(\int_{-\infty}^{0} x^2e^x\ dx + 2\int_{-\infty}^{0} xe^x\ dx + \int_{-\infty}^{0} e^x\ dx\right) =$
$4\,(2 + (-2) + 1) = 4 \Rightarrow \|a_2\| = 2.$

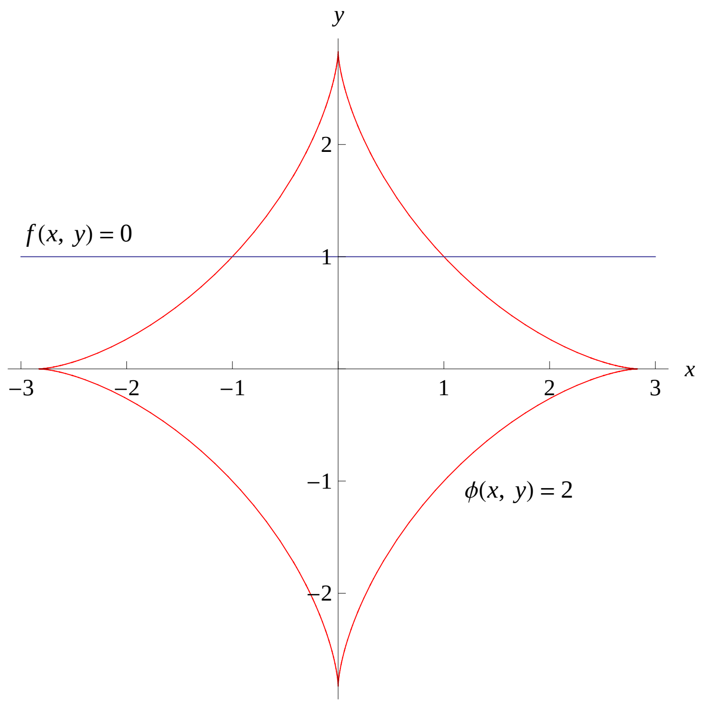
Daraus ergibt sich das orthonormierte System

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{2} \\ \phi_2 &= \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{x+1}{2}. \end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

  Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:$ $\boxed{f(x,y) = (y-1)^2}$

  unter der Nebenbedingung $\phi(x,y) = 2$ mit $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}:$ $\boxed{\phi(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$



Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie alle Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, an denen das Skalarfeld $\phi(x,y)$ Singularitäten besitzt! Welche dieser Punkte erfüllen die Nebenbedingung? *a): 1 P.*

Der Gradient

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

ist an all jenen Punkten unbeschränkt, deren x - oder y - Komponente gleich Null ist. Die Singularitäten lauten daher

$$\left\{ P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x = 0 \vee y = 0 \right\}.$$

Auf der Kurve, die durch $\phi(x,y) = 2$ definiert wird, liegen die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}.$$

b) Verwenden Sie die Methode der Lagrange- Multiplikatoren und Ihr Ergebnis aus a) zur Berechnung der möglichen Extrema.

Bestimmen Sie anschließend die globalen Minima und Maxima des Problems. *b): 3 P.*

Die Lagrangefunktion lautet $F(x,y,\lambda) = (y-1)^2 + \lambda\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 2\right)$.
Das Differenzieren dieser Funktion führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}: \quad & \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{3}\lambda x^{-\frac{1}{3}} = 0\\
\mathrm{II}: \quad & \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,(y-1) + \frac{2}{3}\lambda y^{-\frac{1}{3}} = 0\\
\mathrm{III}: \quad & \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Aus Gleichung I und Gleichung II ergibt sich $y = 1$ und $\lambda = 0$. Durch Einsetzen dieser Beziehungen in Gleichung III findet man

$$x^{\frac{2}{3}} + 1 = 2 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Aus der Methode der Lagrangemultiplikatoren erhält man die Extrema

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die unter a) bestimmten Singularitäten der Nebenbedingung (P_1, P_2, P_3, P_4) stellen ebenfalls mögliche Extrema dar.
An den Punkten $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nimmt die Funktion $f(x,y)$ den Wert 0 und an den Punkten $P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ 0 \end{pmatrix}$ Wert 1 an.
Am Punkt $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ nimmt die Funktion $f(x,y)$ den Wert $\left(9 - \sqrt{32}\right)$ und am Punkt $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$ den Wert $\left(9 + \sqrt{32}\right)$ an.
Da die Nebenbedingung eine kompakte Menge beschreibt, liegen an den Punkten E_1 und E_2 Minima vor. Der Punkt P_4 ist ein globales Maximum.

Betrachten Sie nun folgende Gleichung: $\boxed{g(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 2}$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y)$ lokal um den Punkt $A = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $y = y(x)$ aufgelöst werden kann. *c): 1 P.*

Die drei Bedingungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen in zwei Variablen müssen überprüft werden.

(i) $g(\xi,\eta) = 0$: $\quad (-1)^{\frac{2}{3}} + (1)^{\frac{2}{3}} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

(ii) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ sind stetig in einer Umgebung von (ξ,η).

(iii) $\frac{\partial g}{\partial y}\mid_{(\xi,\eta)} \neq 0$: $\quad \frac{\partial g}{\partial y}\mid_{(\xi,\eta)} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{1}} = \frac{2}{3} \neq 0$

Da die Bedingungen erfüllt sind, kann die Funktion $g(x,y)$ lokal nach $y = y(x)$ aufgelöst werden.

d) Berechnen Sie die 1. Ableitung der implizit definierten Funktion $y(x)$ am Punkt A durch implizite Differentiation. *d): 1 P.*

$$y'(x)\mid_{(\xi,\eta)} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}\mid_{(\xi,\eta)} \qquad \Rightarrow y'(x)\mid_A = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = 1$$