# Zusätzliche Aufgaben für die 4. Übung Analysis II TPH

Beispiel 1: Eine zylindrische Dose mit Radius $r$ und Höhe $h$ soll ein Fassungsvermögen von genau 1 Liter haben. Sie soll so konstruiert werden, dass der Materialverbrauch minimiert wird, inclusive Deckel und Boden.

a) Formulieren Sie das Problem als eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung(en?) und lösen Sie die sich ergebenden Gleichungen, um das optimale $r$ und $h$ zu finden.

b) Angenommen, für den Deckel wird ein anderes Material verwendet, dass doppelt so viel kostet wie das sonst eingesetzte Material. Nun sollen die Materialkosten minimiert werden. Schreiben Sie das betreffende System von Gleichungen für diesen Fall an. Sie brauchen dieses nicht zu lösen. Wie wird sich die Lösung qualitativ von der Lösung zu a) unterscheiden?

Beispiel 2: Es sei bekannt, dass sich ein Teilchen auf einer Gerade $g$ im $\mathbb{R}^3$ in Ruhe befindet, die durch zwei lineare Gleichungen

$$(x, y, z) \in g \quad \Leftrightarrow \quad g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0,$$

beschrieben wird. Es stehen $n$ mit Fehlern behaftete Messungen $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k, \widetilde{z}_k)$, $k = 1, \ldots, n$, der Positionen $(x, y, z)$ des Teilchens zur Verfügung. Aus diesen Messungen soll die unbekannte Position möglichst gut rekonstruiert werden: Wie suchen $(x, y, z) \in g$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} ((x - \widetilde{x}_k)^2 + (y - \widetilde{y}_k)^2 + (z - \widetilde{z}_k)^2) \quad \text{minimal.}$$

Schreiben Sie ein Gleichungssystem an, dessen Lösung die Koordinaten $(x, y, z)$ liefert.

Beispiel 3: Ein Teilchen bewegt sich entlang der Parabel $y = x^2$. Gesucht ist die Position $(x, y)$ des Teilchens, an der es der Kreislinie mit dem Mittelpunkt $(0, 1)$ und Radius $1/2$ am nächsten kommt.

a) Schreiben Sie ein Gleichungssystem an, dessen Lösung die Koordinaten $(x, y)$ liefert.

b) Geben Sie für das unter a) hergeleitete Gleichungssystem alle Lösungen an und interpretieren Sie diese.

Beipiel 4: Die physikalisch gebildete Bergzwergschnauzerdame B[1] plant eine Wegstrecke von genau 5 km in genau 1 Stunde mit einem vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil $v(t) = (at + bt^3)$[km/h] zurückzulegen (Zeit $t \in [0, 1]$ in Stunden gemessen). Aufgrund äußerer Bedingungen ist ihr bekannt, dass der erforderlich Energieaufwand für die Gesamtstrecke gleich $C(a^2 + b^2)$ ist. Wie soll sie die Laufparameter $a$ und $b$ wählen, so dass die aufgewendete Energie minimal wird? Die Konstante $C$ kennt B nicht, doch das hält sie nicht davon ab die Aufgabe zu lösen. Gehen Sie unter a) darauf ein, wieso es auf die Kenntnis von $C$ tatsächlich nicht ankommt.

a) Formulieren Sie das Problem als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung(en?).

b) Bestimmen Sie die optimalen Parameter $a$ und $b$.

c) Die gesetzlich zulässige Höchstgeschwindigkeit für Bergzwergschnauzer beträgt 12 km/h. Wird B in die Radarfalle tappen?

Der Beweis für die Minimaleigenschaft der Lösung ist nicht verlangt.

[1] Die Aufgabe ist artifiziell konstruiert, Die physikalische Relevanz der Annahmen, Dimensionen der Parameter, etc. stehen hier nicht zur Debatte.