Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2015

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe 1 (DI, 5.5.2015) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = x^2 e^{xy}.}$ *a): 2 P.*

Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y) und werten Sie anschließend beides im Punkt $(x_0,y_0) = (1,0)$ aus.

$$\nabla f(x,y) = e^{xy}(x^2y + 2x, x^3),\ \nabla f(1,0) = (2,1)$$

$$H(f)(x,y) = e^{xy}\begin{pmatrix} x^2y^2 + 4xy + 2 & 3x^2 + x^3y \\ 3x^2 + x^3y & x^4 \end{pmatrix},$$

$$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0,y_0) = (1,0)$ an. *b): 1 P.*

$$T_2(x,y) = 1 + \begin{pmatrix} 2, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1, & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. *c): 3 P.*

Ist f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch?

Handelt es sich um Minima oder Maxima?

$\nabla f(x,y) = e^{xy}(x^2y + 2x, x^3) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \;\Rightarrow\; y$ beliebig.

Es existieren damit die stationären Punkte $(0,y), y \in \mathbb{R}$.

$H(f)(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f ist an $(0,y)$ parabolisch, es kann damit keine unmittelbare Aussage gemacht werden.

$(0,y)$ sind lokale Minima, da $f(0,y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$ und $f(x,y) > 0,\ 0 \neq x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ gilt.

- **Aufgabe 2.**

a) *a): 4 P.*

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt, dass das Verhältnis $f(T,a) = \frac{T^2}{a^3}$ für alle Planeten konstant ist, wobei T der Umlaufzeit des Planeten entspricht und a der Länge der großen Halbachse seiner Umlaufbahn.

Nehmen Sie an, dass die absoluten Fehler ΔT von T und Δa von a bekannt sind. Schätzen Sie den dadurch verursachten absoluten Fehler Δf von f in erster Näherung ab.

Schätzen Sie den Fehler konkret für die Erde ($T = 3.1558 \cdot 10^7 \pm 10^3$ s, $a = 1.49597 \cdot 10^{11} \pm 10^6$ m).

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a = \frac{2T}{a^3}\Delta T - \frac{3T^2}{a^4}\Delta a \tag{1}$$

$$\Rightarrow \; |\Delta f| \leq \frac{T}{a^3}\left(2\,|\Delta T| + 3\frac{T}{a}\,|\Delta a|\right) \tag{2}$$

Erde: $\Delta f \leq 0.0679$

b) *b): 2 P.*

Geben Sie eine Abschätzung (in der 1. Näherung) für den relativen Fehler $\frac{\Delta f}{f}$ an der von den relativen Fehlern $\frac{\Delta T}{T}$ und $\frac{\Delta a}{a}$ verursacht wird. Geben Sie die Abschätzung auch konkret für die Erde an, wenn man nun von relativen Fehlern $\frac{\Delta T}{T} = 0.005\%$, $\frac{\Delta a}{a} = 0.01\%$ ausgeht.

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial T} T \frac{\Delta T}{T} + \frac{\partial f}{\partial a} a \frac{\Delta a}{a}\right) \tag{3}$$

$$= \frac{a^3}{T^2}\left(\frac{2T^2}{a^3}\frac{\Delta T}{T} - \frac{3T^2}{a^3}\frac{\Delta a}{a}\right) = 2\frac{\Delta T}{T} - 3\frac{\Delta a}{a} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta f}{f}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta T}{T}\right| + 3\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \tag{5}$$

Erde: $\frac{\Delta f}{f} \leq 0.04\%$

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: *a): 2,5 P.*

$$\boxed{f(x,y,z) = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right] - \sqrt{e}.}$$

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Man zeige, dass $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, \frac{1}{4})$ lokal nach $z = z(x,y)$ auflösbar ist.

$$f(x_0,y_0,z_0) = \exp\left[\cos^2(\tfrac{\pi}{4})\right] - \sqrt{e} = \exp\left[(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2\right] - \sqrt{e} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (y^3z) \to \text{stetig}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (3xy^2z) \to \text{stetig}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (xy^3) \to \text{stetig}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = \sqrt{e} \cdot (-2)\cos(\tfrac{\pi}{4})\sin(\tfrac{\pi}{4}) \cdot \pi = -\sqrt{e} \cdot \pi \neq 0$$

b) Berechnen Sie für die Funktion $z = z(x, y)$ das Taylorpolynom 1.Grades um die Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, \frac{1}{4})$ unter Benutzung der Gleichung $f(x, y, z(x, y)) = 0$. *b): 3,5 P.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (y^3z + xy^3 \cdot \tfrac{\partial z}{\partial x}) \equiv 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = -2\sqrt{e} \cdot \cos(\tfrac{\pi}{4}) \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4}) \cdot (\tfrac{1}{4} + \pi \cdot \tfrac{\partial z}{\partial x}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (3xy^2z + xy^3 \cdot \tfrac{\partial z}{\partial y}) \equiv 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = -2\sqrt{e} \cdot \cos(\tfrac{\pi}{4}) \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4}) \cdot (\tfrac{3\pi}{4} + \pi \cdot \tfrac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$$

Das Taylorpolynom 1.Grades fuer die Funktion $z(x, y)$ ergibt sich damit zu:

$$z(x, y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi} \cdot (x - \pi) - \frac{3}{4} \cdot (y - 1)$$