Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe 2 (DI, 5.5.2015) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) *a): 4 P.*

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz gilt, dass das Verhältnis $G(m, r) = F\frac{r^2}{m^2}$ für zwei Körper mit gleicher Masse m und Abstand r konstant ist, wenn die Gravitationskraft zwischen diesen Körpern F beträgt.

Nehmen Sie an, dass die absoluten Fehler Δr von r und Δm von m bekannt sind, F sei exakt gemessen, d.h. nehmen Sie $\Delta F = 0$ an. Schätzen Sie den dadurch verursachten absoluten Fehler ΔG von G in erster Näherung ab.

Schätzen Sie den Fehler konkret für zwei Protonen mit Massen $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \pm 10^{-30}$ kg, die in einem Abstand von $r = 10^{-3} \pm 10^{-30}$ m voneinander platziert sind. Nehmen Sie $F = 1.84 \cdot 10^{-58}$ N als exakt gemessene Gravitationskraft an.

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial m}\Delta m + \frac{\partial G}{\partial r}\Delta r = -\frac{2Fr^2}{m^3}\Delta m + \frac{2Fr}{m^2}\Delta r \tag{1}$$

$$\Rightarrow \ |\Delta G| \leq \frac{2Fr}{m^2}\left(|\Delta m| + \frac{r}{m}|\Delta r|\right) \tag{2}$$

Protonen: $\Delta G \leq 7.9 \cdot 10^{-14}$

b)

b): 2 P.

Geben Sie eine Abschätzung (in der 1. Näherung) für den relativen Fehler $\frac{\Delta G}{G}$ an, der von den relativen Fehlern $\frac{\Delta m}{m}$ und $\frac{\Delta r}{r}$ verursacht wird. Geben Sie die Abschätzung auch konkret für die Protonen an, wenn man nun von relativen Fehlern $\frac{\Delta m}{m} = 0.02\%$, $\frac{\Delta r}{r} = 0.01\%$ ausgeht.

$$\frac{\Delta G}{G} \approx \frac{1}{G}\left(\frac{\partial G}{\partial m} m \frac{\Delta m}{m} + \frac{\partial G}{\partial r} r \frac{\Delta r}{r}\right) \tag{3}$$

$$= \frac{m^2}{Fr^2}\left(-\frac{2Fr^2}{m^2}\frac{\Delta m}{m} + \frac{2Fr^2}{m^2}\frac{\Delta r}{r}\right) = -2\frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta G}{G}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta m}{m}\right| + 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \tag{5}$$

Protonen: $\left|\frac{\Delta G}{G}\right| \leq 0.06\%$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}:$ *a): 2,5 P.*

$$\boxed{f(x,y,z) = \exp\left[\sin^2(xy^3z)\right] - \sqrt{e}.}$$

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Man zeige, dass $f(x,y,z)$ in einer Umgebung von $(x_0,y_0,z_0) = (\pi, 1, \frac{1}{4})$ lokal nach $z = z(x,y)$ auflösbar ist.

$f(x_0,y_0,z_0) = \exp\left[\sin^2(\frac{\pi}{4})\right] - \sqrt{e} = \exp\left[(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\right] - \sqrt{e} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left[\sin^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (y^3z) \to \text{stetig}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left[\sin^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (3xy^2z) \to \text{stetig}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \exp\left[\sin^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3z(x,y))\sin(xy^3z(x,y)) \cdot (xy^3) \to \text{stetig}$

$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = \sqrt{e} \cdot (-2)\cos(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4}) \cdot \pi = -\sqrt{e} \cdot \pi \neq 0$

b) Berechnen Sie für die Funktion $z = z(x, y)$ das Taylorpolynom 1. Grades um die Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, \frac{1}{4})$ unter Benutzung der Gleichung $f(x, y, z(x, y)) = 0$. *b): 3,5 P.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left[\sin^2(xy^3 z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3 z(x,y))\sin(xy^3 z(x,y)) \cdot (y^3 z + xy^3 \cdot \tfrac{\partial z}{\partial x}) \equiv 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0} = -2\sqrt{e} \cdot \cos(\tfrac{\pi}{4}) \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4}) \cdot (\tfrac{1}{4} + \pi \cdot \tfrac{\partial z}{\partial x}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left[\sin^2(xy^3 z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^3 z(x,y))\sin(xy^3 z(x,y)) \cdot (3xy^2 z + xy^3 \cdot \tfrac{\partial z}{\partial y}) \equiv 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0,z_0} = -2\sqrt{e} \cdot \cos(\tfrac{\pi}{4}) \cdot \sin(\tfrac{\pi}{4}) \cdot (\tfrac{3\pi}{4} + \pi \cdot \tfrac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$$

Das Taylorpolynom 1.Grades für die Funktion $z(x, y)$ ergibt sich damit zu:

$$z(x, y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi} \cdot (x - \pi) - \frac{3}{4} \cdot (y - 1)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = y^2 e^{xy}.}$ *a): 2 P.*

Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y) und werten Sie anschließend beides im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ aus.

$$\nabla f(x,y) = e^{xy}(y^3, 2y + y^2 x), \ \nabla f(1,0) = (1,2)$$

$$H(f)(x,y) = e^{xy} \begin{pmatrix} y^4 & 3y^2 + xy^3 \\ 3y^2 + xy^3 & x^2y^2 + 4xy + 2 \end{pmatrix},$$

$$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,1)$ an. *b): 1 P.*

$$T_2(x,y) = 1 + \begin{pmatrix} 1, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x, & y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. *c): 3 P.*

Ist f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch?

Handelt es sich um Minima oder Maxima?

$\nabla f(x, y) = e^{xy}(y^3, 2y + y^2 x) = 0$

$\Rightarrow y = 0 \;\Rightarrow\; x$ beliebig.

Es existieren damit die stationären Punkte $(x, 0), x \in \mathbb{R}$.

$H(f)(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

f ist an $(x, 0)$ parabolisch, es kann damit keine unmittelbare Aussage gemacht werden.

$(x, 0)$ sind lokale Minima, da $f(x, 0) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$ und $f(x, y) > 0,\ x \in \mathbb{R},\ 0 \neq y \in \mathbb{R}$ gilt.