Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2015

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe 3 (DI, 5.5.2015) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden ***Kästchen*** **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}:$ *a): 2,5 P.*

$$\boxed{f(x,y,z) = \exp\left[\cos^2(xy^5z)\right] - \sqrt{e}.}$$

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Man zeige, dass $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, \frac{1}{4})$ lokal nach $z = z(x,y)$ auflösbar ist.

$f(x_0,y_0,z_0) = \exp\left[\cos^2(\frac{\pi}{4})\right] - \sqrt{e} = \exp\left[(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\right] - \sqrt{e} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right] \cdot (-2)\cos(xy53z(x,y))\sin(xy^5z(x,y)) \cdot (y^5z) \to$ stetig

$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left[\cos^2(xy^5z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^5z(x,y))\sin(xy^5z(x,y)) \cdot (5xy^4z) \to$ stetig

$\frac{\partial f}{\partial z} = \exp\left[\cos^2(xy^5z)\right] \cdot (-2)\cos(xy^5z(x,y))\sin(xy^5z(x,y)) \cdot (xy^5) \to$ stetig

$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = \sqrt{e} \cdot (-2)\cos(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4}) \cdot \pi = -\sqrt{e} \cdot \pi \neq 0$

b) Berechnen Sie für die Funktion $z = z(x,y)$ das Taylorpolynom 1.Grades um die Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, \frac{1}{4})$ unter Benutzung der Gleichung $f(x,y,z(x,y)) = 0$. *b): 3,5 P.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left[\cos^2(xy^5z)\right]\cdot(-2)\cos(xy^5z(x,y))\sin(xy^5z(x,y))\cdot(y^5z + xy^5\cdot\frac{\partial z}{\partial x}) \equiv 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = -2\sqrt{e}\cdot\cos(\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{\pi}{4})\cdot(\frac{1}{4} + \pi\cdot\frac{\partial z}{\partial x}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left[\cos^2(xy^3z)\right]\cdot(-2)\cos(xy^5z(x,y))\sin(xy^5z(x,y))\cdot(5xy^4z + xy^5\cdot\frac{\partial z}{\partial y}) \equiv 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0,z_0} = -2\sqrt{e}\cdot\cos(\frac{\pi}{4})\cdot\sin(\frac{\pi}{4})\cdot(\frac{5\pi}{4} + \pi\cdot\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{5}{4}$$

Das Taylorpolynom 1.Grades für die Funktion $z(x,y)$ ergibt sich damit zu:

$$z(x,y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi}\cdot(x-\pi) - \frac{5}{4}\cdot(y-1)$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $\boxed{f(x,y) = x^2 e^{-xy}.}$ *a): 2 P.*

Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y) und werten Sie anschließend beides im Punkt $(x_0, y_0) = (1,0)$ aus.

$$\nabla f(x,y) = e^{-xy}(2x - x^2y, -x^3),\ \nabla f(1,0) = (2,-1)$$

$$H(f)(x,y) = e^{-xy}\begin{pmatrix} x^2y^2 - 4xy + 2 & x^3y - 3x^2 \\ x^3y - 3x^2 & x^4 \end{pmatrix},$$

$$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0, y_0) = (1,0)$ an. *b): 1 P.*

$$T_2(x,y) = 1 + \begin{pmatrix} 2, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1, & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. *c): 3 P.*

Ist f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch?

Handelt es sich um Minima oder Maxima?

$\nabla f(x,y) = e^{-xy}(2x - x^2y, -x^3) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \;\Rightarrow\; y$ beliebig.

Es existieren damit die stationären Punkte $(0,y), y \in \mathbb{R}$.

$H(f)(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

f ist an $(0,y)$ parabolisch, es kann damit keine unmittelbare Aussage gemacht werden.

$(0,y)$ sind lokale Minima, da $f(0,y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$ und $f(x,y) > 0,\ 0 \neq x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ gilt.

- **Aufgabe 3.**

a) *a): 4 P.*

Nach dem Coulombschen Gesetz gilt, dass das Verhältnis $\epsilon_0(r, Q) = \frac{1}{F} \cdot \frac{Q^2}{r^2}$ für zwei identische Ladungen Q, die sich im Abstand r voneinander befinden, konstant ist, wenn die abstoßende elektrische Kraft zwischen diesen Ladungen F beträgt.

Nehmen Sie an, dass die absoluten Fehler Δr von r und ΔQ von Q bekannt sind, F sei exakt gemessen, d.h. nehmen Sie $\Delta F = 0$ an. Schätzen Sie den dadurch verursachten absoluten Fehler $\Delta \epsilon_0$ von ϵ_0 in erster Näherung ab.

Schätzen Sie den Fehler konkret für zwei Protonen mit Ladungen $Q = 1.602 \cdot 10^{-19} \pm 10^{-22}$ C, die in einem Abstand von $r = 10^{-3} \pm 10^{-25}$ m platziert sind. Nehmen Sie $F = 2.32 \cdot 10^{-22}$ N als exakt gemessene elektrische Kraft an.

$$\Delta \epsilon_0 \approx \frac{\partial \epsilon_0}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial \epsilon_0}{\partial Q} \Delta Q = -\frac{2Q^2}{Fr^3} \Delta r + \frac{2Q}{Fr^2} \Delta r \tag{1}$$

$$\Rightarrow \; |\Delta \epsilon_0| \leq \frac{2Q}{Fr^2} \left(|\Delta r| + \frac{Q}{r} |\Delta Q| \right) \tag{2}$$

Protonen: $\Delta \epsilon_0 \leq 1.381 \cdot 10^{-16}$

b) *b): 2 P.*

Geben Sie eine Abschätzung (in der 1. Näherung) für den relativen Fehler $\frac{\Delta\epsilon_0}{\epsilon_0}$ an, der von den relativen Fehlern $\frac{\Delta r}{r}$ und $\frac{\Delta Q}{Q}$ verursacht wird. Geben Sie die Abschätzung auch konkret für die Protonen an, wenn man nun von relativen Fehlern $\frac{\Delta r}{r} = 0.03\%$, $\frac{\Delta Q}{Q} = 0.02\%$ ausgeht.

$$\frac{\Delta\epsilon_0}{\epsilon_0} \approx \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{\partial\epsilon_0}{\partial r} r \frac{\Delta r}{r} + \frac{\partial\epsilon_0}{\partial Q} Q \frac{\Delta Q}{Q}\right) \tag{3}$$

$$= \frac{Fr^2}{Q^2}\left(-\frac{2Q^2}{Fr^2}\frac{\Delta r}{r} + \frac{2Q^2}{Fr^2}\frac{\Delta Q}{Q}\right) = -2\frac{\Delta r}{r} + 2\frac{\Delta Q}{Q} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta\epsilon_0}{\epsilon_0}\right| \leq 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + 2\left|\frac{\Delta q}{q}\right| \tag{5}$$

Protonen: $\left|\frac{\Delta\epsilon_0}{\epsilon_0}\right| \leq 0.1\%$