

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 Gruppe 1 (DI, 16.6.2015) (mit Lösung)

— Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i> <input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Die Bahn eines Asteroiden sei durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}x^2 - z^2 &= 4 \\x - \frac{y}{2} + z &= 0\end{aligned}$$

beschrieben, wobei $y \geq 0$ gelten soll. Gesucht ist in dieser Aufgabe jene Position des Asteroiden, an der er der Erde am nächsten kommt. Nehmen Sie die Erde als Kugel im Ursprung mit Radius 2 an.

- a) Stellen Sie das entsprechende Extremwertproblem auf, sowie das Gleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Koordinaten (x, y, z) liefert. a): 2 P.

Zu minimieren ist die Größe $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2$. Das ist jedoch äquivalent dazu, die Zielfunktion

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$$

zu minimieren. Die Nebenbedingungen lauten

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, z) &:= x^2 - z^2 - 4 = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) &:= x - \frac{1}{2}y + z = 0.\end{aligned}$$

Es müssen daher zwei Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 eingeführt werden, die Lagrange-Funktion ergibt sich zu:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 - z^2 - 4) + \lambda_2(x - \frac{1}{2}y + z).$$

Als notwendige Bedingung für eine Extremalstelle muss $\nabla F = 0$ gelten, damit lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 2y - \frac{1}{2}\lambda_2 \\ 2z - 2\lambda_1 z + \lambda_2 \\ x^2 - z^2 - 4 \\ x - \frac{1}{2}y + z \end{pmatrix} = 0$$

- b) Drücken Sie mithilfe des Gleichungssystems die gesuchten Koordinaten nur durch die (noch unbekanntenen) Lagrange-Multiplikatoren aus. b): 1 P.

Aus der ersten Gleichung folgt: $x = -\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}$. Aus der zweiten Gleichung folgt: $y = \frac{\lambda_2}{4}$. Aus der dritten Gleichung folgt: $z = -\frac{\lambda_2}{2(1-\lambda_1)}$.

- c) Bestimmen Sie die Werte der Lagrange-Multiplikatoren und der Koordinaten (x, y, z) der Lösung. Die Minimalitätseigenschaft muss dabei **nicht** explizit nachgewiesen werden. c): 3 P.

Einsetzen der in b) gefundenen Darstellungen von (x, y, z) führt auf die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} -\lambda_2 \left(\frac{1}{2(1+\lambda_1)} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2(1-\lambda_1)} \right) &= 0 \\ \frac{\lambda_2^2}{4} \left(\frac{1}{(1+\lambda_1)^2} - \frac{1}{(1-\lambda_1)^2} \right) &= 4 \end{aligned}$$

für die zwei Unbekannten λ_1, λ_2 .

Die erste Gleichung ist entweder für $\lambda_2 = 0$ oder $\left(\frac{1}{2(1+\lambda_1)} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2(1-\lambda_1)} \right) = 0$ erfüllt. $\lambda_2 = 0$ kann aufgrund der 2. Gleichung ausgeschlossen werden. Es muss daher (nach Multiplikation mit $(1+\lambda_1)(1-\lambda_1) = 1-\lambda_1^2$ auf beiden Seiten)

$$\frac{1}{2}(1-\lambda_1) + \frac{1}{8}(1-\lambda_1^2) + \frac{1}{2}(1+\lambda_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\lambda_1^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \pm 3$$

gelten.

Um die zweite Gleichung aufzulösen, wird auf beiden Seiten mit $4(1+\lambda_1)^2(1-\lambda_1)^2 = 4(1-\lambda_1^2)^2$ multipliziert und man erhält

$$\lambda_2^2((1-\lambda_1)^2 - (1+\lambda_1)^2) = 16(1-\lambda_1^2)^2 \Leftrightarrow \lambda_2^2(1-2\lambda_1+\lambda_1^2-1-2\lambda_1-\lambda_1^2) = 1024 \Leftrightarrow -4\lambda_2^2\lambda_1 = 1024.$$

Damit das möglich ist, muss $0 > -3 = \lambda_1$ gelten. Daraus ergibt sich

$$\lambda_2 = \pm \frac{16}{\sqrt{-\lambda_1}} = \pm \frac{16}{\sqrt{3}},$$

wobei $\lambda_2 = 4y$ nicht-negativ sein soll und daher $\lambda_2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$ gilt.

Einsetzen ergibt für die Koordinaten

$$x = -\frac{16}{\sqrt{32}(-2)} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad z = -\frac{16}{\sqrt{324}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

- d) *Zusatzpunkt:* Wie lauten die Koordinaten des Punktes auf der Erde, dem der Asteroid am nächsten kommt? c): +1 P.

Die Koordinaten erhält man einfach durch Normieren des Ortsvektors

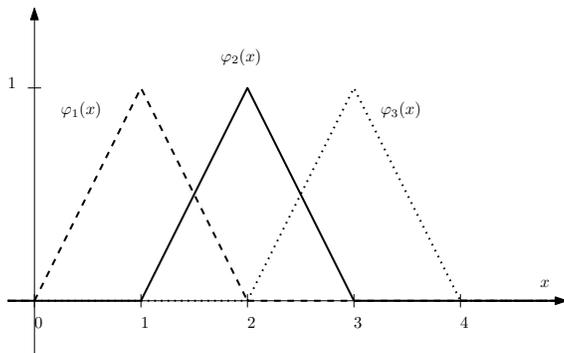
$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auf Norm 2. Die Norm berechnet sich zu $\|P\| = \sqrt{36}/\sqrt{3}$. Der auf den Radius normierte Vektor und damit der gesuchte Ortsvektor lauten damit

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

• **Aufgabe 2.**

Sei U jener linearer Unterraum des $L^2(0, 4)$ mit dem Skalarprodukt $(f, g) := \int_0^4 f(x)g(x) dx$ und Norm $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$, der von den Funktionen $M = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ aufgespannt wird,



wobei

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & x < n - 1 \\ x - n + 1 & n - 1 \leq x < n \\ -x + n + 1 & n \leq x < n + 1 \\ 0 & n + 1 \leq x \end{cases}$$

gelte.

Hinweis: Erkennen Sie anhand der Skizze Ähnlichkeiten der drei Funktionen, um den Aufwand beim Integrieren zu reduzieren.

- a) Zeigen Sie, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linear unabhängig sind und finden Sie jene zwei Funktionen aus M , die bereits orthogonal aufeinander stehen. a): 2 P.

Wir zeigen, dass aus $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 \equiv 0$ $a = b = c = 0$ folgt. Auf den Intervallen $[0, 1]$ und $[3, 4]$ sind genau φ_1 bzw. φ_3 ungleich 0, somit muss $a = c = 0$ gelten. Daraus muss schließlich aber $b = 0$ folgen.

Es gilt $(\varphi_1, \varphi_3) = 0$, da $\varphi_1(x)\varphi_3(x) = 0 \forall x$ gilt. φ_1 und φ_3 stehen also bereits orthogonal aufeinander.

- b) Geben Sie eine Orthogonalbasis von U an.

b): 3 P.

Es fehlt noch, φ_2 auf die bereits gefundenen (orthogonalen) Basisfunktionen zu orthogonalisieren:

$$w_2 := \varphi_2 - \frac{(\varphi_2, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}\varphi_1 - \frac{(\varphi_2, \varphi_3)}{(\varphi_3, \varphi_3)}\varphi_3,$$

mit

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_1^2 (-x + 2)(x - 1) dx = \int_0^1 (1 - x)x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = (\varphi_2, \varphi_3)$$

und

$$(\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_3, \varphi_3) = \|\varphi_n\|^2 = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Insgesamt gilt

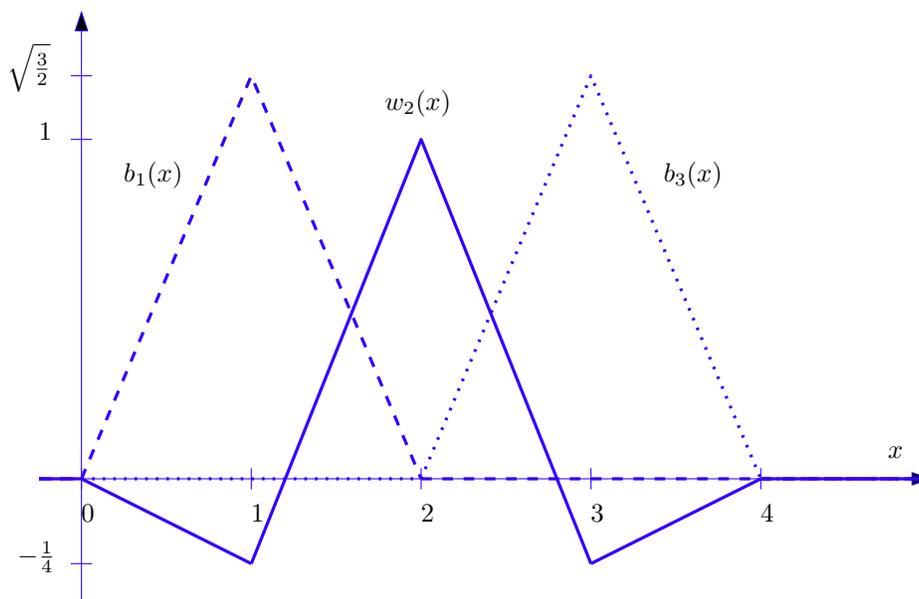
$$w_2 = \varphi_2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \varphi_1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \varphi_3 = \varphi_2 - \frac{1}{4} (\varphi_1 + \varphi_3)$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{x}{4} & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ -x + 3 - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{x}{4} - 1 & 3 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{x}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5x}{4} - \frac{3}{2} & 1 \leq x < 2 \\ -\frac{5x}{4} + \frac{7}{2} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{x}{4} - 1 & 3 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases}.$$

- c) Normieren Sie die in a) gefundenen, aufeinander orthogonal stehenden Basisfunktionen und skizzieren diese gemeinsam mit der dritten, in b) orthogonalisierten Funktion. c): 1 P.

Die Norm wurde bereits in b) berechnet: $\|\varphi_n\|^2 = \frac{2}{3}$ und erhalten damit als orthonormierte Funktionen

$$b_1 := \sqrt{\frac{3}{2}} \varphi_1, \quad b_3 := \sqrt{\frac{3}{2}} \varphi_3.$$



• **Aufgabe 3.**

a) Ermitteln Sie mit einem Separationsansatz die allgemeine Lösung des Problems :

a): 3 P.

$$\boxed{u_{xx}(x, t) + 4u_t(x, t) - 3u(x, t) = 0} \quad u(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0$$

Hinweis: Die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen können als bekannt vorausgesetzt werden:

$$\phi''(x) + a^2 \phi(x) = 0 \rightarrow \phi(x) = A \cos(ax) + B \sin(ax) \quad (a, A, B \in \mathbb{R})$$

$$\phi'(x) = a \phi(x) \rightarrow \phi(x) = C e^{ax} \quad (a, C \in \mathbb{R})$$

$$u(x, t) = \phi(x) \psi(t) \rightarrow u_{xx} = \phi_{xx} \psi \quad | \quad u_t = \phi \psi_t$$

$$\frac{\phi_{xx}}{\phi} = -4 \frac{\psi_t}{\psi} + 3 = \lambda \quad | \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda < 0 \rightarrow -\mu^2 < 0$$

$$\phi_{xx} + \mu^2 \phi = 0 \rightarrow \phi(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

$$\psi_t = \frac{-\lambda+3}{4} \psi \rightarrow \psi(t) = e^{\frac{-\lambda+3}{4} t} C$$

$$A, B, C \in \mathbb{R}$$

b) Benutzen Sie folgende Zusatzbedingungen, um die konstanten Faktoren zu bestimmen.

b): 3 P.

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} \sin(3x)$$

Schreiben Sie die vollständige Lösung $u(x, t)$ an.

Hinweis: Anfangsbedingung \rightarrow Koeffizientenvergleich!

$$\phi(0) = 0 = A \Rightarrow A = 0$$

$$\phi(\pi) = 0 = B \sin(\mu\pi) \quad B \neq 0 \Rightarrow \sin(\mu\pi) = 0$$

$$\mu\pi = k\pi \quad | \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu = k \Rightarrow \lambda = -k^2$$

$$\phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B \sin(kx)$$

$$u(x, t) = \phi(x) \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(kx) e^{\frac{-\lambda+3}{4}t} \quad | \quad C_k = B C$$

$$u(x, 0) = \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} \sin(3x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(kx)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{4} \quad | \quad C_3 = \frac{1}{4} \quad | \quad C_i = 0, \quad i \neq 1, 3 \in \mathbb{N}$$

$$u(x, t) = \frac{3}{4} e^t \sin(x) + \frac{1}{4} e^{3t} \sin(3x)$$