Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2015

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 Gruppe 3 (DI, 16.6.2015) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

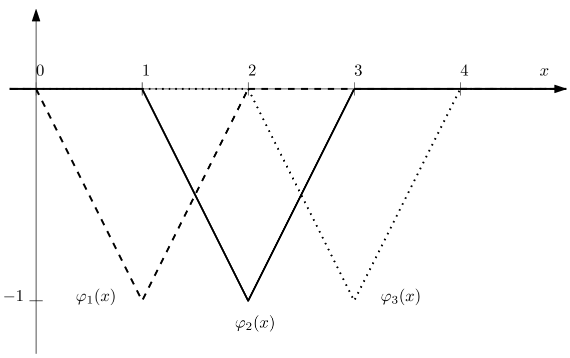
Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

Sei U jener linearer Unterraum des $L^2(0,4)$ mit dem Skalarprodukt $(f,g) := \int_0^4 f(x)\,g(x)\,dx$ und Norm $\|f\| := \sqrt{(f,f)}$, der von den Funktionen $M = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ aufgespannt wird,



wobei

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} 0 & x < n-1 \\ -x+n-1 & n-1 \leq x < n \\ x-n-1 & n \leq x < n+1 \\ 0 & n+1 \leq x \end{cases}$$

gelte.

Hinweis: Erkennen Sie anhand der Skizze Ähnlichkeiten der drei Funktionen, um den Aufwand beim Integrieren zu reduzieren.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linear unabhängig sind und finden Sie jene zwei Funktionen aus M, die bereits orthogonal aufeinander stehen. *a): 2 P.*

Wir zeigen, dass aus $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 \equiv 0$ $a = b = c = 0$ folgt. Auf den Intervallen $[0,1]$ und $[3,4]$ sind genau φ_1 bzw. φ_3 ungleich 0, somit muss $a = c = 0$ gelten. Daraus muss schließlich aber $b = 0$ folgen.
Es gilt, dass $(\varphi_1, \varphi_3) = 0$, da $\varphi_1(x)\,\varphi_3(x) = 0\ \forall x$ gilt. φ_1 und φ_3 stehen also bereits orthogonal aufeinander.

b) Geben Sie eine Ortho**gonal**basis von U an. *b): 3 P.*

Es fehlt noch, φ_2 auf die bereits gefundenen (orthogonalen) Basisfunktionen zu orthogonalisieren:

$$w_2 := \varphi_2 - \frac{(\varphi_2, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)}\varphi_1 - \frac{(\varphi_2, \varphi_3)}{(\varphi_3, \varphi_3)}\varphi_3,$$

mit

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_1^2 (-x+2)\,(x-1)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = (\varphi_2, \varphi_3)$$

und

$$(\varphi_1, \varphi_1) = (\varphi_3, \varphi_3) = \|\varphi_n\|^2 = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

Insgesamt gilt

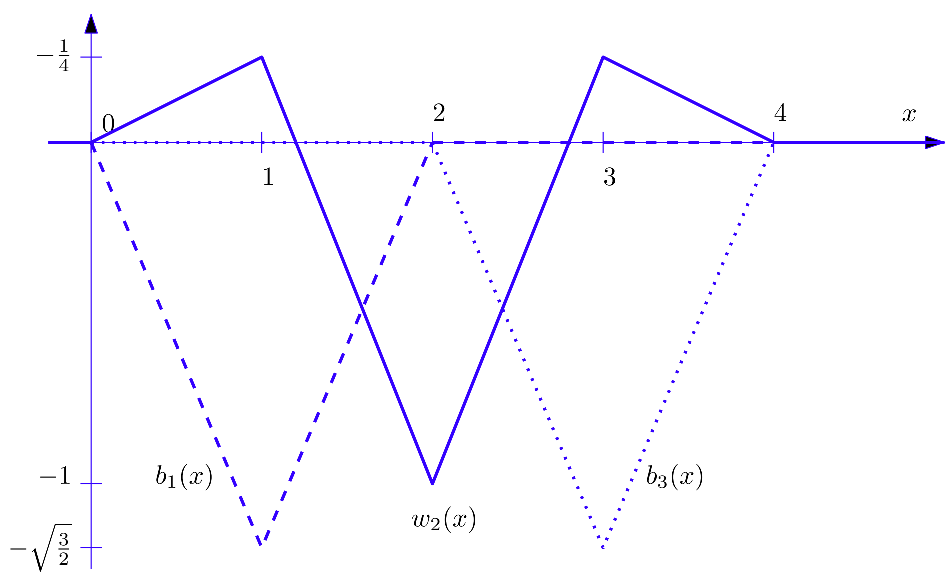
$$w_2 = \varphi_2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}\varphi_1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}\varphi_3 = \varphi_2 - \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_3)$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{4} & 0 \leq x < 1 \\ -x + 1 - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ x - 3 + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} & 2 \leq x < 3 \\ -\frac{x}{4} + 1 & 3 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{4} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{5x}{4} + \frac{3}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{5x}{4} - \frac{7}{2} & 2 \leq x < 3 \\ -\frac{x}{4} + 1 & 3 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases}.$$

c) Normieren Sie die in a) gefundenen, aufeinander orthogonal stehenden Basisfunktionen und skizzieren diese gemeinsam mit der dritten, in b) orthogonalisierten Funktion. *c): 1 P.*

Die Norm wurde bereits in b) berechnet: $\|\varphi_n\|^2 = \frac{2}{3}$ und erhalten damit als orthonomierte Funktionen

$$b_1 := \sqrt{\frac{3}{2}}\varphi_1, \quad b_3 := \sqrt{\frac{3}{2}}\varphi_3.$$



- **Aufgabe 2.**

a) Ermitteln Sie mit einem Separationsansatz die allgemeine Lösung des Problems : *a): 3 P.*

$$\boxed{u_{xx}(x,t) + 7u_t(x,t) - 5u(x,t) = 0} \quad u(x,t),\ x \in [0,\pi],\ t \geq 0$$

Hinweis: Die allgemeinen Lösungen folgender Differentialgleichungen können als bekannt vorausgesetzt werden:

$\phi''(x) + a^2\,\phi(x) = 0 \;\rightarrow\; \phi(x) = A\cos(ax) + B\sin(ax)\ (a, A, B \in \mathbb{R})$

$\phi'(x) = a\,\phi(x) \;\rightarrow\; \phi(x) = C\,e^{a\,x}\ (a, C \in \mathbb{R})$

$u(x,t) = \phi(x)\,\psi(t) \;\rightarrow\; u_{xx} = \phi_{xx}\,\psi \quad | \quad u_t = \phi\,\psi_t$

$\frac{\phi_{xx}}{\phi} = (-7)\,\frac{\psi_t}{\psi} + 5 = \lambda \quad | \,\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda < 0 \rightarrow -\mu^2 < 0$

$\phi_{xx} + \mu^2\,\phi = 0 \;\rightarrow\; \phi(x) = A\,\cos(\mu x) + B\,\sin(\mu x)$

$\psi_t = \frac{-\lambda+5}{7}\,\psi \;\rightarrow\; \psi(t) = e^{\frac{-\lambda+5}{7}\,t}\,C$

$A, B, C \in \mathbb{R}$

b) Benutzen Sie folgende Zusatzbedingungen, um die konstanten Faktoren zu bestimmen. *b): 3 P.*

$$u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

Schreiben Sie die vollständige Lösung $u(x,t)$ an.

Hinweis: Anfangsbedingung → Koeffizientenvergleich!

$\phi_x(0) = 0 = B \;\rightarrow\; B = 0$

$\phi(\pi) = 0 = A\cos(\mu\pi) \;\; A \neq 0 \;\rightarrow\; \cos(\mu\pi) = 0$

$\mu\,\pi = (k + \frac{1}{2})\,\pi \;\mid\; k = 0, 1, 2...$

$\mu = k + \frac{1}{2} \;\;\Rightarrow\; \lambda = -(k + \frac{1}{2})^2$

$\phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A\cos((k + \frac{1}{2})\,x)$

$u(x,t) = \phi(x)\,\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos((k + \frac{1}{2})\,x)\, e^{\frac{-\lambda+5}{7}\,t} \;\; \mid C_k = A\,C$

$u(x,0) = \frac{3}{4}\cos(\frac{3x}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\frac{5x}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos((k + \frac{1}{2})\,x)$

$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{4} \;\; \mid C_2 = \frac{1}{4} \;\; \mid C_i = 0 \; i \neq 1, 2 \; \in \mathbb{N}$

$u(x,t) = \frac{3}{4}\, e^{\frac{29t}{28}} \cos(\frac{3x}{2}) + \frac{1}{4}\, e^{\frac{45t}{28}} \cos(\frac{5x}{2})$

• **Aufgabe 3.** Die Bahn eines Asteroiden sei durch die Gleichungen

$$z^2 - 4 = y^2$$
$$z + y = \frac{x}{2}$$

beschrieben, wobei $x \geq 0$ gelten soll. Gesucht ist in dieser Aufgabe jene Position des Asteroiden, an der er der Erde am nächsten kommt. Nehmen Sie die Erde als Kugel im Ursprung mit Radius 2 an.

a) Stellen Sie das entsprechende Extremwertproblem auf, sowie das Gleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Koordinaten (x, y, z) liefert. *a): 2 P.*

Zu minimieren ist die Größe $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2$. Das ist jedoch äquivalent dazu, die Zielfunktion

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$$

zu minimieren. Die Nebenbedingungen lauten

$$\varphi_1(x, y, z) := z^2 - y^2 - 4 = 0$$
$$\varphi_2(x, y, z) := z - \frac{1}{2}x + y = 0.$$

Es müssen daher zwei Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 eingeführt werden, die Lagrange-Funktion ergibt sich zu:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(z^2 - y^2 - 4) + \lambda_2(z - \frac{1}{2}x + y).$$

Als notwendige Bedingung für eine Extremalstelle muss $\nabla F = 0$ gelten, damit lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2z + 2\lambda_1 z + \lambda_2 \\ 2x - \frac{1}{2}\lambda_2 \\ 2y - 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ z^2 - y^2 - 4 \\ z - \frac{1}{2}x + y \end{pmatrix} = 0$$

b) Drücken Sie mithilfe des Gleichungssystems die gesuchten Koordinaten nur durch die (noch unbekannten) Lagrange-Multiplikatoren aus. *b): 1 P.*

Aus der ersten Gleichung folgt: $z = -\frac{\lambda_2}{2(1+\lambda_1)}$. Aus der zweiten Gleichung folgt: $x = \frac{\lambda_2}{4}$. Aus der dritten Gleichung folgt: $y = -\frac{\lambda_2}{2(1-\lambda_1)}$.

c) Bestimmen Sie die Werte der Lagrange-Multiplikatoren und der Koordinaten (x, y, z) der Lösung. Die Minimalitätseigenschaft muss dabei **nicht** explizit nachgewiesen werden. *c): 3 P.*

Einsetzen der in b) gefundenen Darstellungen von (x, y, z) führt auf die zwei Gleichungen

$$-\lambda_2\left(\frac{1}{2(1+\lambda_1)}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1-\lambda_1)}\right)=0$$
$$\frac{\lambda_2^2}{4}\left(\frac{1}{(1+\lambda_1)^2}-\frac{1}{(1-\lambda_1)^2}\right)=4$$

für die zwei Unbekannten λ_1, λ_2.
Die erste Gleichung ist entweder für $\lambda_2 = 0$ oder $\left(\frac{1}{2(1+\lambda_1)}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2(1-\lambda_1)}\right)=0$ erfüllt. $\lambda_2 = 0$ kann aufgrund der 2. Gleichung ausgeschlossen werden. Es muss daher (nach Multiplikation mit $(1+\lambda_1)(1-\lambda_1) = 1-\lambda_1^2$ auf beiden Seiten)

$$\frac{1}{2}(1-\lambda_1)+\frac{1}{8}(1-\lambda_1^2)+\frac{1}{2}(1+\lambda_1)=0 \Leftrightarrow \frac{9}{8}-\frac{1}{8}\lambda_1^2=0 \Leftrightarrow \lambda_1=\pm 3$$

gelten.
Um die zweite Gleichung aufzulösen, wird auf beiden Seiten mit $4(1+\lambda_1)^2(1-\lambda_1)^2 = 4(1-\lambda_1^2)^2$ multipliziert und man erhält

$$\lambda_2^2((1-\lambda_1)^2-(1+\lambda_1)^2)=16(1-\lambda_1^2)^2 \Leftrightarrow \lambda_2^2(1-2\lambda_1+\lambda_1^2-1-2\lambda_1-\lambda_1^2)=1024 \Leftrightarrow -4\lambda_2^2\lambda_1=1024.$$

Damit das möglich ist, muss $0 > -3 = \lambda_1$ gelten. Daraus ergibt sich

$$\lambda_2=\pm\frac{16}{\sqrt{-\lambda_1}}=\pm\frac{16}{\sqrt{3}},$$

wobei $\lambda_2 = 4x$ nicht-negativ sein soll und daher $\lambda_2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$ gilt.
Einsetzen ergibt für die Koordinaten

$$x=\frac{4}{\sqrt{3}}, \quad y=-\frac{16}{\sqrt{3}24}=-\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad z=-\frac{16}{\sqrt{3}2(-2)}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

d) *Zusatzpunkt:* Wie lauten die Koordinaten des Punktes auf der Erde, dem der Asteroid am nächsten kommt? *c): +1 P.*

Die Koordinaten erhält man einfach durch Normieren des Ortsvektors

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

auf Norm 2. Die Norm berechnet sich zu $\|P\| = \sqrt{36}/\sqrt{3}$. Der auf den Radius normierte Vektor und damit der gesuchte Ortsvektor lauten damit

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$