Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2016

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 (FR, 24.6.2016) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x'(t) = e^{-\frac{t}{2}}\,x(t), \quad x(0) = \frac{e}{2}.$$

a) Geben Sie eine zur Differentialgleichung equivalente Integralgleichung an *a): 1 P.*

$$x(t) = \frac{e}{2} + \int_0^t e^{-\frac{s}{2}}\,x(s)\mathrm{d}s$$

b) Berechnen Sie x_1, x_2 und x_3 der Picarditeration, mit dem Startwert $x_0(t) \equiv \frac{e}{2}$. *b): 3,5 P.*

$$x_1 = \frac{e}{2} + \int_0^t e^{-\frac{s}{2}}\frac{e}{2}\mathrm{d}s = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(-2e^{-\frac{s}{2}}\right)\Big|_0^t = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(-2e^{-\frac{t}{2}} + 2\right) = \frac{e}{2}\left(3 - 2e^{-\frac{t}{2}}\right)$$

$$x_2 = \frac{e}{2} + \int_0^t e^{-\frac{s}{2}}\frac{e}{2}\left(3 - 2e^{-\frac{s}{2}}\right)\mathrm{d}s = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\int_0^t 3e^{-\frac{s}{2}} - 2e^{-s}\mathrm{d}s = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(-6e^{-\frac{s}{2}} + 2e^{-s}\right)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(-6e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-t} + 6 - 2\right) = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(4 - 6e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-t}\right) = \frac{e}{2}\left(5 - 6e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-t}\right)$$

$$x_3 = \frac{e}{2} + \int_0^t e^{-\frac{s}{2}}\frac{e}{2}\left(5 - 6e^{-\frac{s}{2}} + 2e^{-s}\right)\mathrm{d}s = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\int_0^t \left(5e^{-\frac{s}{2}} - 6e^{-s} + 2e^{-\frac{3}{2}s}\right)\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(-10e^{-\frac{s}{2}} + 6e^{-s} - \frac{4}{3}e^{-\frac{3}{2}s}\right)\Bigg|_0^t = \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(-10e^{-\frac{t}{2}} + 6e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-\frac{3}{2}t} + 10 - 6 + \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{e}{2} + \frac{e}{2}\left(\frac{19}{3} - 10e^{-\frac{t}{2}} + 6e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\right) = \frac{e}{2}\left(\frac{22}{3} - 10e^{-\frac{t}{2}} + 6e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\right)$$

c) Wie lautet die exakte Lösung der Integralgleichung? *c): 1,5 P.*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^{-\frac{t}{2}}x \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{x} = e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\ln x = -2e^{-\frac{t}{2}} + C \quad\Rightarrow\quad x = Ce^{-2e^{-\frac{t}{2}}}$$

$$x(0) = \frac{e}{2} = Ce^{-2} \quad\Rightarrow\quad C = \frac{1}{2}e^{3} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{1}{2}e^{3-2e^{-\frac{t}{2}}}$$

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei die Funktion *6 P.*

$$f(x) := \begin{cases} -x \cdot \cos(x), & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ x \cdot \cos(x), & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Entwickeln Sie die Funktion f in ihre trigonometrische Fourierreihe.

Hinweis 1: $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x+y) + \cos(x-y))$

Hinweis 2: $\int x \cdot \cos(\alpha x)dx = \frac{x}{\alpha} \cdot \sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \cos(\alpha x) \quad , \alpha \neq 0$

Die Funktion f gerade, da gilt:

$$f(-x) = f(x) \ \Rightarrow b_k = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

Da die Funktion gerade ist, kann das Integral umgeschrieben werden:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(x) \cos(kx) dx$$

$\rightarrow$ *Hinweis* 1

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cdot (\cos((k+1)x) + \cos((k-1)x)) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{\pi} x \cdot \cos((k+1)x) dx + \int_{0}^{\pi} x \cos((k-1)x)) \right] dx$$

$\rightarrow$ *Hinweis 2*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{k+1}\sin((k+1)x) + \frac{1}{(k+1)^2}\cos((k+1)x) + \frac{x}{k-1}\sin((k-1)x) + \frac{1}{(k-1)^2}\cos((k-1)x)\right]_0^\pi$$

$k \neq 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\cos((k+1)\pi) + \frac{1}{(k-1)^2}\cos((k-1)\pi) - (\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2})\right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\cos((k+1)\pi) + \frac{1}{(k-1)^2}\cos((k-1)\pi) - (\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2})\right]$$

$\rightarrow k...gerade$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{(k+1)^2} + \frac{2}{(k-1)^2}\right]$$

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4(k^2+1)}{(k^2-1)^2} = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}$$

$\rightarrow k...ungerade$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k-1)^2}\right] = 0$$

$$a_k = \begin{cases} 0, & k...ungerade \\ -\frac{4}{\pi}(\frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}), & k...gerade \end{cases}$$

Hinweis 1

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\cos(x)\cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cdot(\cos(2x)+1)dx$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\Big|_0^\pi + \frac{\cos(2x)}{4}\Big|_0^\pi + \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\cdot(x\sin(x)\big|_0^\pi + \cos(x)\big|_0^\pi) = \frac{2}{\pi}\cdot(-2) = -\frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim -\frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{2}\cos(x) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}\cdot\cos(2l)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Betrachten Sie die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch *a): 3 P.*

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1].$$

- Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ ist.
- Zeigen Sie, dass $f(x) \equiv 0$ eine Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist.
- Zeigen Sie danach, dass diese Grenzfunktion nicht die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist.

Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend, daher gilt für $n \leq m$:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |x^n - x^m| dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Wähle nun $N(\epsilon)$ so, dass $\frac{1}{N(\epsilon)+1} < \epsilon$, dann gilt

$$\|f_n - f_m\|_1 < \epsilon \quad \forall n,\, m \geq N(\epsilon).$$

Die Grenzfunktion ist $f(x) = 0$, da

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |x^n| dx = \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$f(x) = 0$ ist nicht die Grenzfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, da

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x^n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Betrachten Sie für $T \in (0,1)$ die Integralgleichung *b): 3 P.*

$$x(t) = 1 - 3\int_0^t s^2 x(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass diese Gleichung eine eindeutige Lösung $x \in C[0,T]$ besitzt.
Dazu:

- Schreiben Sie die Angabe als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0,T], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$.
  Hinweis: Der Beweis, dass $Fx \in (C[0,T], \|\cdot\|_\infty) für\ x \in [0,T], \|\cdot\|_\infty)$ darf entfallen.

- Beweisen sie danach, dass F eine Kontraktion ist.

Definiere den Operator F für $x \in C[0,T]$ durch

$$(Fx)(t) = 1 - 3\int_0^t s^2 x(s)ds.$$

F ist Kontraktion auf $(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$:

$$\begin{aligned}
\|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \sup_{t\in[0,T]} \left|1 - 3\int_0^t s^2 x_1(s)ds - 1 + 3\int_0^t s^2 x_2(s)ds\right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} 3\int_0^t s^2|x_1(s) - x_2(s)|ds \\
&\leq \|x_1 - x_2\|_\infty \cdot 3\int_0^T s^2 ds \\
&= T^3\|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Da $T \in (0,1)$ folgt $T^3 < 1$ und damit ist F eine Kontraktion.
Damit folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0,T]$ mit $Fx = x$, also existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung.