Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2016

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe B (DI, 3.5.2016) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen,

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := \frac{24(x^2+y)\cdot x^4}{(5y^4)^2+(x^3+y^2)^3\cdot x}, \ (x,y)\neq(0,0), \quad f(0,0):=0.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist. *a): 3 P.*

Hinweis: Es reicht zwei Nullfolgen x und y so zu finden, dass

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)\neq 0.$$

Mit $x=h$ und $y=-h$; $\quad h\to 0$ gilt:

$$f(h,-h) = \lim_{(h\to 0)} \frac{24\cdot(h^2-h)\cdot h^4}{25h^8+(h^3+h^2)^3\cdot h}$$

$$f(h,-h) = \lim_{(h\to 0)} \frac{24h^5\cdot(h-1)}{25h^8+h\cdot h^6(h+1)^3}$$

Kürzen durch h^5 :

$$f(h,-h) = \lim_{(h\to 0)} \frac{24h-24}{25h^3+h^2\cdot(h+1)^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{(h\to 0)} f(h,-h)\to -\infty$$

Die Funktion ist also im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

b) Betrachten Sie Richtungen $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| = 1$ und $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ (beide Komponenten von h verschwinden nicht gleichzeitg). Zeigen Sie, dass für solche Richtungen die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt $(0,0)$ *nicht existiert.* *a): 3 P.*

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Richtungsableitung.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon}, \quad (\varepsilon h) = \begin{pmatrix} \varepsilon h_1 \\ \varepsilon h_2 \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24(\varepsilon^2 h_1^2 + \varepsilon h_2) \cdot \varepsilon^4 h_1^4}{25\varepsilon^8 h_2^8 + \varepsilon h_1 \cdot (\varepsilon^3 h_1^3 + \varepsilon^2 h_2^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24\varepsilon^5(\varepsilon h_1^6 + h_1^4 h_2)}{25\varepsilon^8 h_2^8 + \varepsilon h_1 \varepsilon^6 \cdot (\varepsilon h_1^3 + h_2^2)^3}$$

Kürzen durch ε^5 :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{24 \cdot (\varepsilon h_1^6 + h_1^4 h_2)}{25\varepsilon^3 h_2^8 + \varepsilon^2 h_1 \cdot (\varepsilon h_1^3 + h_2^2)^3}$$

Anwendung des Limes:

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon h) - f(0)}{\varepsilon} \to \infty$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-z^2-4\sqrt{x^2+z^2}+4 \\ x^2-y^2+z^2-2x-5z+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Entscheiden Sie, ob sich das Gleichungssytem an $(x,y,z)=(0,1,1)$ lokal nach x und y auflösen lässt und geben Sie den Tangentenvektor $(x'(1),y'(1))$ an.
a): 3 P.

Überprüfe die drei Voraussetzungen:

$$g(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Jacobimatrix von g ist

$$J(g)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-\frac{4x}{\sqrt{x^2+z^2}} & 2y & -2z-\frac{4z}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ -2x-2 & -2y & -5+2z \end{pmatrix} .$$

Alle partiellen ersten Ableitungen von g sind stetig. Die partielle Jacobimatrix an $(0,1,1)$

$$J_{xy}(g)(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

ist regulär.
Das Gleichungssystem für den Tangentenvektor erhält man durch implizite Differentiation der Gleichung $g(x,y,z)=0$:

$$\begin{aligned} g(x(z),y(z),z) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(x(z),y(z),z) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial(x,y)} \cdot \begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \end{pmatrix} + \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

An $(x,y,z)=(0,1,1)$ wird daraus

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist $(x'(1),y'(1)) = (-\frac{9}{2},3)$.

b) Die Gleichung $f(x, y) = x^2 y - x^2 + x\mathrm{e}^{y^2} = 0$ kann lokal um den Punkt $(1, 0)$ nach y aufgelöst werden. Bestimmen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $y(x)$ das Taylorpolynom 1. Grades mit Anschlussstelle $(1, 0)$ durch implizite Differentiation.

Zusatzpunkt: Erweitern Sie das Taylorpolynom um den quadratischen Term.

b): 1 P. + 1 ZP.

Erste Ableitung durch implizite Differentiation:

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x, y(x)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} y'(x) + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

$$y'(x) = -\frac{2xy - 2x + \mathrm{e}^{y^2}}{x^2 + 2xy\mathrm{e}^{y^2}} \quad \Rightarrow \quad y'(1) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

Zweite Ableitung durch nochmaliges implizites Differenzieren: (mit $\partial f / \partial x = f_x$)

$$\begin{aligned} 0 &= f_{xx} + 2 f_{xy} y'(x) + f_{yy} y'^2(x) + f_y y''(x) \\ \Rightarrow y''(x) &= -\frac{f_{xx} + 2 f_{xy} y'(x) + f_{yy} y'^2(x)}{f_y} \Rightarrow y''(0) = -4 \end{aligned}$$

$$T_2(x) = x - 2x^2$$

c) Man bestimme alle Punkte, an denen die Funktion $f(x, y, z) = x + y + z$ nach der Lagrange Multiplikatorenmethode einen Extremwert auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ mit der Ebene $x + y - 2z = 0$ haben kann.
Es ist nicht notwendig, diese Punkte weiter zu charakterisieren.

c): 2 P.

Die Lagrangefunktion lautet

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 3) + \lambda_2(x + y - 2z) \ .$$

Es ist das Gleichungssystem

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 1 + 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 1 + 2\lambda_2 z - 2\lambda_2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 \\ x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Aus der ersten und zweiten Zeile folgt $x = y$, aus der fünften Zeile $x = y = z$ und aus der vierten Zeile $x = y = z = \pm 1$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = 2y^3 - 9x^2 + 6xy - 3$.
Berechnen Sie den Gradienten, sowie die Hesse–Matrix von f in einem Punkt (x,y). *a): 2 P.*

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} -18x + 6y \\ 6x + 6y^2 \end{pmatrix} \\ H(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} -18 & 6 \\ 6 & 12y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Entwickeln Sie f in ein quadratisches Taylor–Polynom um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$. *b): 1 P.*

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} H(f)(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= -12 + \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -18 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= -3 - 9x^2 + 6xy \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.
Geben Sie an, ob f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.
Handelt es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte? *c): 3 P.*

Die Bedingung

$$\begin{pmatrix} -18x + 6y \\ 6x + 6y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist an den Punkten $(0,0)$ und $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3})$ erfüllt.
Anwendung des Hauptminorenkriteriums:

$$\begin{aligned} \det H(f)(0,0) &= \begin{vmatrix} -18 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \\ \det H(f)(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}) &= \begin{vmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 36 > 0 \ \wedge \ -18 < 0 \end{aligned}$$

Daher ist $(0,0)$ hyperbolisch (Sattelpunkt) und $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3})$ elliptisch (Maximum).