Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2017

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe 1 (DI, 02.05.2017) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18+2*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon [0;2\pi]\times[0;2\pi]\to\mathbb{R}:$ $\boxed{f(x,y)=\cos(x)2^{\sin(y)}}$ *a): 1,5 P.*

Berechnen Sie den Gradienten sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y).
Hinweis: $a^x=\exp(x\cdot\ln(a))$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-\sin(x)2^{\sin(y)}\\ \cos(x)2^{\sin(y)}\ln(2)\cos(y)\end{pmatrix},$$

$$H(f)(x,y)=\begin{pmatrix}-\cos(x)2^{\sin(y)} & -\sin(x)2^{\sin(y)}\ln(2)\cos(y)\\ -\sin(x)2^{\sin(y)}\ln(2)\cos(y) & \ln(2)\cos(x)2^{\sin(y)}(\ln(2)\cos^2(y)-\sin(y))\end{pmatrix}$$

b) Geben Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0,y_0)=(\pi,\pi)$ an und berechnen Sie die dabei auftretenden Matrix-Vektor- und Vektor-Vektor- Multiplikationen explizit. Vereinfachen des Polynoms nicht notwendig. *b): 1 P.*

$$T_2(x,y)=-1+\begin{pmatrix}x-\pi, & y-\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \ln(2)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\pi, & y-\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -(\ln(2))^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\pi\\ y-\pi\end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y)=-1+\ln(2)(y-\pi)+\tfrac{1}{2}((x-\pi)^2-(\ln(2))^2(y-\pi)^2)$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f in $[0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$. *c): 3,5 P.*

Handelt es sich bei diesen Punkten um elliptische, hyperbolische oder parabolische Punkte?
Welche Art von Extremum (Minimum, Maximum oder Sattelpunkt) tritt daher auf?

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)2^{\sin(y)} \\ \cos(x)2^{\sin(y)}\ln(2)\cos(y) \end{pmatrix} = 0,$$

Aus dem 1. Eintrag folgt: $x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow$ daraus folgt aus 2. Eintrag: $y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (unabhängig von x).

Es existieren damit die stationären Punkte
$P1 = (0, \frac{\pi}{2}), P2 = (0, \frac{3\pi}{2}), P3 = (\pi, \frac{\pi}{2}), P4 = (\pi, \frac{3\pi}{2}), P5 = (2\pi, \frac{\pi}{2}), P6 = (2\pi, \frac{3\pi}{2})$.

$H(f)(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\ln(2) \end{pmatrix}$

$H(f)(0, \frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -2^{-1} & 0 \\ 0 & \ln(2)2^{-1} \end{pmatrix}$

$H(f)(\pi, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\ln(2) \end{pmatrix}$

$H(f)(\pi, \frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & -2^{-1}\ln(2) \end{pmatrix}$

$H(f)(2\pi, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\ln(2) \end{pmatrix}$

$H(f)(2\pi, \frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -2^{-1} & 0 \\ 0 & 2^{-1}\ln(2) \end{pmatrix}$

Nach dem Hauptminorenkriterium handelt es sich bei dem Punkten P1, P3 und P5 um elliptische Punkte. P1 und P5 sind dabei Hochpunkte (Hesse-Matrix negativ definit); P3 ist ein Tiefpunkt (Hesse-Matrix positiv definit). Bei den Punkten P2, P4 und P6 handelt es sich um Sattelpunkte (Hesse-Matrix indefinit).

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\forall (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0\ . \end{aligned}$$

a) *a): 3 P.*

Untersuchen Sie f in $(x,y) = (0,0)$ auf Stetigkeit, stetig partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit.

Hinweis:

Wählen Sie zur Überprüfung der Stetigkeit einen linearen Zusammenhang zwischen y und x und machen Sie Gebrauch von der Implikationskette der gefragten Eigenschaften.

Bekanntlich gilt: Stetig partielle Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ totale Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit.

Ist die Stetigkeit in $(x,y) = (0,0)$ verletzt, gelten dort weder totale, noch stetig partielle Differenzierbarkeit.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{1+kx}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

Der Limes $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nimmt für verschiedene k unterschiedliche Werte an. Daher gilt:

f ist in $(x,y) = (0,0)$ nicht stetig $\Rightarrow$ f ist nicht total differenzierbar $\Rightarrow$ f ist nicht stetig partiell differenzierbar.

b) *b): 3 P.*

Untersuchen Sie die Richtungsdifferenzierbarkeit von f.
Hinweis:
Gehen Sie von der Definition der Richtungsdifferenzierbarkeit aus.

Einsetzen der Funktion in die Definition der Richtungsableitung mit $v_1^2 + v_2^2 = 1$ ergibt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f((0,0) + \epsilon(v_1, v_2)) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon v_1 + \epsilon^2 v_1 v_2}{\epsilon^2 \underbrace{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}_{=1}} = \infty \ .$$

Daher: f ist an $(x, y) = (0, 0)$ nicht richtungsdifferenzierbar.

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = \ln\left(x + y^2 + z\right) \, .$$

a) *a): 1,5 P.*

Man zeige, dass $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ lokal nach $z = z(x, y)$ auflösbar ist.

i) $f(0, 1, 0) = 0$ ist erfüllt.

ii) Alle partiellen Ableitungen erster Ordnung müssen in einer Umgebung von $(0, 1, 0)$ stetig sein.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x + y^2 + z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x + y^2 + z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{x + y^2 + z} \end{aligned}$$

Die Bedingung ist erfüllt, da der Nenner an $(0, 1, 0)$ nicht verschwindet und die Zähler jeweils stetig sind.

iii) Die partielle Jacobimatrix $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 0) = 1$ ist regulär.

Da alle Bedingungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen erfüllt sind, gilt:
f ist in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$ lokal nach $z = z(x, y)$ auflösbar.

b) Berechnen Sie für die Funktion $z = z(x,y)$ das Taylorpolynom 1. Grades um die Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (0,1,0)$ unter Benutzung der Gleichung $f(x,y,z(x,y)) = 0$.

2 Zusatzpunkte: Erweitern Sie die Entwicklung bis zur 2. Ordnung. *b): 4.5+2 P.*

$$T_1(x,y) = \underbrace{z(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x$ durch implizite Differentiation:

$$f(x,y,z(x,y)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x,y,z(x,y)) = 0$$
$$f_z z_x + f_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z_x = -\frac{f_x}{f_z}$$

Eingesetzt erhält man $z_x = -1$. Analog: $\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = -\frac{f_y}{f_z} = -2$.

$$T_1(x,y) = 0 - x - 2(y-1) = 2 - x - 2y$$

Um das Taylorpolynom 2. Ordnung

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2}\left((x-x_0)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

zu bestimmen, benötigen wir die Ableitungen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}$. Diese erhält man durch nochmalige implizite Differentiation:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z(x,y)) + f_z(x,y,z(x,y))z_x(x,y) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_x(x,y,z(x,y)) + f_z(x,y,z(x,y))z_x(x,y)\right) &= 0 \\
0 = f_{xx} + 2f_{xz}z_x + f_{zz}z_x^2 + f_z z_{xx} \Rightarrow z_{xx} &= -\frac{f_{xx} + 2f_{xz}z_x + f_{zz}z_x^2}{f_z}
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man $z_{xx} = 0$. Analog: $z_{yy} = -2$. Für z_{xy}:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(f_x(x,y,z(x,y)) + f_z(x,y,z(x,y))z_x(x,y)\right) &= 0 \\
0 = f_{xy} + f_{zy}z_x + f_{xz}z_y + f_{zz}z_y z_x + f_z z_{xy} \Rightarrow z_{xy} &= -\frac{f_{xy} + f_{zy}z_x + f_{xz}z_y + f_{zz}z_y z_x}{f_z}
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man $z_{xy} = 0$.

$$T_2(x,y) = 2 - x - 2y + \frac{1}{2}\left(-2(y-1)^2\right) = 1 - x - y^2$$