Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

A N A L Y S I S   I I   F Ü R   T P H,   (103.091)

Test 1 Gruppe 2 (DI, 02.05.2017)   *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18+2*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y + z\right) .$$

a) *a): 1,5 P.*

Man zeige, dass $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ lokal nach $y = y(x, z)$ auflösbar ist.

i) $f(1, 0, 0) = 0$ ist erfüllt.

ii) Alle partiellen Ableitungen erster Ordnung müssen in einer Umgebung von $(1, 0, 0)$ stetig sein.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y + z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x^2 + y + z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{x^2 + y + z} \end{aligned}$$

Die Bedingung ist erfüllt, da der Nenner an $(1, 0, 0)$ nicht verschwindet und die Zähler jeweils stetig sind.

iii) Die partielle Jacobimatrix $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) = 1$ ist regulär.

Da alle Bedingungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen erfüllt sind, gilt:
f ist in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ lokal nach $y = y(x, z)$ auflösbar.

b) Berechnen Sie für die Funktion $y = y(x,z)$ das Taylorpolynom 1. Grades um die Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ unter Benutzung der Gleichung $f(x, y(x,z), z) = 0$.

2 Zusatzpunkte: Erweitern Sie die Entwicklung bis zur 2. Ordnung. *b): 4.5+2 P.*

$$T_1(x,z) = \underbrace{y(x_0, z_0)}_{=0} + \frac{\partial y}{\partial x}(x_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial y}{\partial z}(x_0, z_0) \cdot (z - z_0)$$

$\frac{\partial y}{\partial x} = y_x$ durch implizite Differentiation:

$$f(x, y(x,z), z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x, y(x,z), z) = 0$$
$$f_y y_x + f_x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_x = -\frac{f_x}{f_y}$$

Eingesetzt erhält man $y_x = -2$. Analog: $\frac{\partial y}{\partial z} = y_z = -\frac{f_z}{f_y} = -1$.

$$T_1(x,z) = 0 - 2(x-1) - z = 2 - 2x - z$$

Um das Taylorpolynom 2. Ordnung

$$T_2(x,z) = T_1(x,z) + \frac{1}{2}\left((x-x_0)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(z-z_0)\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} + (z-z_0)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)$$

zu bestimmen, benötigen wir die Ableitungen $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_{xx}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = y_{xz}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y_{zz}$. Diese erhält man durch nochmalige implizite Differentiation:

$$\begin{aligned}
f_x(x, y(x,z), z) + f_y(x, y(x,z), z) y_x(x,z) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_x(x, y(x,z), z) + f_y(x, y(x,z), z) y_x(x,z)\right) &= 0 \\
0 = f_{xx} + 2 f_{xy} y_x + f_{yy} y_x^2 + f_y y_{xx} \Rightarrow y_{xx} &= -\frac{f_{xx} + 2 f_{xy} y_x + f_{yy} y_x^2}{f_y}
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man $y_{xx} = -2$. Analog: $y_{zz} = 0$. Für y_{xz}:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(f_x(x, y(x,z), z) + f_y(x, y(x,z), z) y_x(x,z)\right) &= 0 \\
0 = f_{xz} + f_{yz} y_x + f_{xy} y_z + f_{yy} y_z y_x + f_y y_{xz} \Rightarrow y_{xz} &= -\frac{f_{xz} + f_{yz} y_x + f_{xy} y_z + f_{yy} y_z y_x}{f_y}
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man $y_{xz} = 0$.

$$T_2(x,z) = 2 - 2x - z + \frac{1}{2}\left(-2(x-1)^2\right) = 1 - x^2 - z$$

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f\colon [0;2\pi]\times[0;2\pi]\to\mathbb{R}:$ $\boxed{f(x,y)=\sin(x)3^{\cos(y)}}$ *a): 1,5 P.*

Berechnen Sie den Gradienten sowie die Hesse-Matrix von f in einem Punkt (x,y).
Hinweis: $a^x=\exp(x\cdot\ln(a))$

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\cos(x)3^{\cos(y)}\\ -\sin(x)3^{\cos(y)}\ln(3)\sin(y)\end{pmatrix},$$

$$H(f)(x,y)=\begin{pmatrix}-\sin(x)3^{\cos(y)} & -\cos(x)3^{\cos(y)}\ln(3)\sin(y)\\ -\cos(x)3^{\cos(y)}\ln(3)\sin(y) & \ln(3)\sin(x)3^{\cos(y)}(\ln(3)\sin^2(y)-\cos(y))\end{pmatrix}$$

b) Geben Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(x_0,y_0)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ an und berechnen Sie die dabei auftretenden Matrix-Vektor- und Vektor-Vektor- Multiplikationen explizit. Vereinfachen des Polynoms nicht notwendig. *b): 1 P.*

$$T_2(x,y)=1+\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{2}, & y-\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -\ln(3)\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{2}, & y-\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & (\ln(3))^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-\frac{\pi}{2}\\ y-\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}$$

$$T_2(x,y)=1-\ln(3)(y-\tfrac{\pi}{2})+\tfrac{1}{2}(-(x-\tfrac{\pi}{2})^2+(\ln(3))^2(y-\tfrac{\pi}{2})^2)$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f in $[0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$. *c): 3,5 P.*

Handelt es sich bei diesen Punkten um elliptische, hyperbolische oder parabolische Punkte?
Welche Art von Extremum (Minimum, Maximum oder Sattelpunkt) tritt daher auf?

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)3^{\cos(y)} \\ -\sin(x)3^{\sin(y)}\ln(3)\sin(y) \end{pmatrix} = 0,$$

Aus dem 1. Eintrag folgt: $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ daraus folgt aus 2. Eintrag: $y = 0, \pi, 2\pi$ (unabhängig von x)

Es existieren damit die stationären Punkte
$P1 = (\frac{\pi}{2}, 0), P2 = (\frac{3\pi}{2}, 0), P3 = (\frac{\pi}{2}, \pi), P4 = (\frac{3\pi}{2}, \pi), P5 = (\frac{\pi}{2}, 2\pi), P6 = (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

$H(f)(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3\ln(3) \end{pmatrix}$

$H(f)(\frac{3\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3\ln(3) \end{pmatrix}$

$H(f)(\frac{\pi}{2}, \pi) = \begin{pmatrix} -3^{-1} & 0 \\ 0 & 3^{-1}\ln(3) \end{pmatrix}$

$H(f)(\frac{3\pi}{2}, \pi) = \begin{pmatrix} 3^{-1} & 0 \\ 0 & -3^{-1}\ln(3) \end{pmatrix}$

$H(f)(\frac{\pi}{2}, 2\pi) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3\ln(3) \end{pmatrix}$

$H(f)(\frac{3\pi}{2}, 2\pi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3\ln(3) \end{pmatrix}$

Nach dem Hauptminorenkriterium handelt es sich bei dem Punkten P1, P2, P5 und P6 um elliptische Punkte. P1 und P5 sind dabei Hochpunkte (Hesse-Matrix negativ definit); P2 und P6 sind Tiefpunkte (Hesse-Matrix positiv definit). Bei den Punkten P3 und P4 handelt es sich um Sattelpunkte (Hesse-Matrix indefinit).

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^3 + xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \; , \forall (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

a) *a): 3 P.*

Untersuchen Sie f in $(x,y) = (0,0)$ auf Stetigkeit, stetig partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit.

Hinweis:

Wählen Sie zur Überprüfung der Stetigkeit einen linearen Zusammenhang zwischen y und x und machen Sie Gebrauch von der Implikationskette der gefragten Eigenschaften.

Bekanntlich gilt: Stetig partielle Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ totale Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit.

Ist die Stetigkeit in $(x,y) = (0,0)$ verletzt, gelten dort weder totale, noch stetig partielle Differenzierbarkeit.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+k^2)}{x^3\sqrt{1+k^2}^3} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

Der Limes $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nimmt für verschiedene k unterschiedliche Werte an. Daher gilt:

f ist in $(x,y) = (0,0)$ nicht stetig $\Rightarrow$ f ist nicht total differenzierbar $\Rightarrow$ f ist nicht stetig partiell differenzierbar.

b) *b): 3 P.*

Untersuchen Sie die Richtungsdifferenzierbarkeit von f.
Hinweis:
Gehen Sie von der Definition der Richtungsdifferenzierbarkeit aus.

Einsetzen der Funktion in die Definition der Richtungsableitung mit $v_1^2 + v_2^2 = 1$ ergibt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f((0,0) + \epsilon(v_1, v_2)) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^3 (v_1^3 + v_1 v_2^2)}{\epsilon^4 \underbrace{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}^{\,3}}_{=1}} = \infty \ .$$

Daher: f ist an $(x, y) = (0, 0)$ nicht richtungsdifferenzierbar.